数学の決闘2018 没問題

2018/10/07

問題 1. (tb_lb さん) 次の式を計算して、既約分数で表してください。

$$\frac{1}{2016^2}+\frac{1}{2017^2}+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2016^2\times 2017^2\times 2018^2}$$
$$-\frac{1}{2016^2\times 2017^2}-\frac{1}{2017^2\times 2018^2}-\frac{1}{2018^2\times 2016^2}$$

なお、必要ならば $2016^2=4064256$, $2017^2=4068289$, $2018^2=4072324$ を利用してください。

問題 2. (tb_lb さん)43 と -13 は和が 30、2乗の和が 2018 となる2整数のペアです。すなわち、

$$43 + (-13) = 30, \quad 43^2 + (-13)^2 = 2018$$

をみたしています。では、和が 30、2乗の和が 2018 となる3整数のトリオを2組求めてください。なお、$(1, 2, 3)$ と $(2, 1, 3)$ のように順番が異なるものは同じ組とみなします。

問題 3. (K さん) 実平面 $\mathbb{R}^2$ 上の図形 C^d を次のように定義する。($d \geqq 1$)

$$C^d := C_1 \cup \cdots \cup C_d \subset \mathbb{R}^2$$

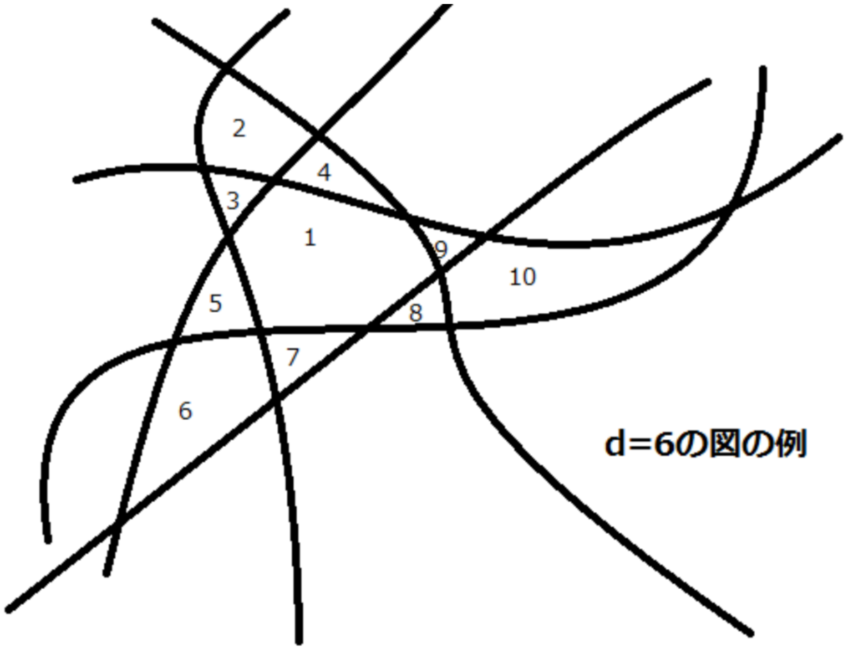
ここで、$\{C_i\}$ の組は次の条件を満たす。

(i) 各 C_i はループを持たない平面曲線。

(ii) C_i, C_j $(i \neq j)$ は必ず一点 p_{ij} だけで交わり、しかも横断的である。

(iii) 上で得られる交点 p_{ij} は全て異なる。

このとき、C^d が定めるループの数を求めよ。但し、下の図のように最小のループだけを数えることとする。



d=6の図の例

問題 4. (K さん) 以下において、$\mathbb{R}^3$ は空間ベクトル全体で、ベクトル同士の和や実数倍（スカラー倍）が自然に定まっているものとする。今、$(-.-)\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は次を満たす。(すなわち、対称な双線形写像である。)

(i) $(av.w) = a(v.w)$

(ii) $(v + v'.w) = (v.w) + (v'.w)$

(iii) $(v.w) = (w.v)$

ここで、$v, v', w \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$ である。

この写像について、次の条件を満たすような部分集合 $S \subset \mathbb{R}^3$ が存在するとする。

$$\forall w \in S, (v.w) > 0 \implies v \in S$$

また、ある $h \in \mathbb{R}^3$ が存在して、$\forall w \in S, (h.w) > 0$ をみたす。

このとき、$v \in \mathbb{R}^3$ について、$\forall w \in S, (v.w) \geqq 0$ ならば $(v.v) \geqq 0$ となることを示せ。

問題5. (よったんさん)ブロック行列 A_i と行列 H_i を以下のように定義するとき、すべての正整数 i で $A_i^i = H_i$ となることを示せ。

$$A_i = (I_{2^{i-1}} \otimes (1 \quad 1) \quad I_{2^{i-1}} \otimes (1 \ \ -1)) \ (1 \leqq i),$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_i = H_1 \otimes H_{i-1} \ (2 \leqq i)$$

ここで $\otimes$ はクロネッカー積を表し、$X = (x_{ij})$ を $n \times m$ 行列、Y を $p \times q$ 行列とすると、$X \otimes Y$ は $np \times mq$ ブロック行列 $\begin{pmatrix} x_{11}Y & \dots & x_{1m}Y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}Y & \dots & x_{nm}Y \end{pmatrix}$ である。必要であればクロネッカー積に関する以下の事実を利用してよい。

(注：交換則は成り立たない)

- $X \otimes (Y + Z) = X \otimes Y + X \otimes Z$ （左分配則）
- $(X + Y) \otimes Z = X \otimes Z + Y \otimes Z$ （右分配則）

- $(kX) \otimes Y = X \otimes (kY) = k(X \otimes Y)$ （スカラー倍）
- $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$ （結合則）
- $(V \otimes W)(X \otimes Y) = (VX) \otimes (WY)$ （混合積性質）
- $(X \otimes Y)^T = X^T \otimes Y^T$ （転置）
- X, Y が正則なら $(X \otimes Y)^{-1} = X^{-1} \otimes Y^{-1}$ （逆元）
- X, Y が正方行列なら $(X \otimes Y) = P(Y \otimes X)P^T$ となる置換行列 P が存在する。（置換相似）

問題6. (よったんさん) 正整数 k $(1 \leqq k \leqq m)$ が $q_k \geqq 0$ の確率で選ばれるルーレットがある。ただし、集合 $K = \{k | q_k \neq 0\}$ に対して $\gcd(K) = 1$ とする。$\gcd(\cdot)$ はすべての元の最大公約数を表し、特に元の数が1個のときは $\gcd(\{k\}) = k$ と定める。
このルーレットを使って一本道の無限に長いすごろくを進む。スタート地点を0 マス目とし、n マス目にちょうど止まる確率を p_n、ルーレットで選ばれる値の期待値を E とするとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{E}$ を証明せよ。

問題 7. (エクシエさん) 定義域が整数全体である実関数 f は、任意の整数 x, y, z に対して

$$f((x^2+y^2z)) = f((x^2-y^2)z) + 4f(xyz)$$

をみたす。この時、任意の整数 x について

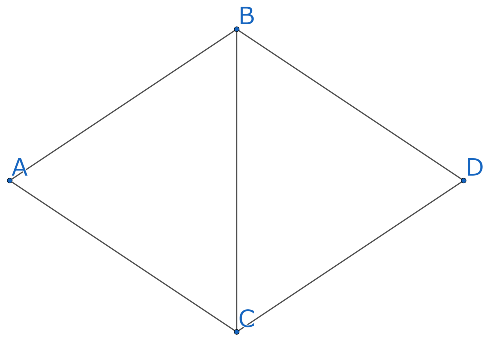
$$f(x) = f(1)x^2$$

がなりたつことを示せ。

※ 必要であれば以下の事実を用いてよい：

素数 p を 4 で割って 1 余るならば、$p = x^2 + y^2$ をみたす整数 x, y が存在する。

問題8. (岸本祥吾さん)図のような状況を考え, 各線分はそれぞれ確率$p(0 \leq p \leq 1)$で線分として残り, 確率$1-p$で消滅するとする．つまり，4つの点A, B, C, Dがあり，線分AB, AC, BC, BD, CDはそれぞれ確率pで存在し，確率$1-p$で消滅する.



この設定のもと, 実数$p(0 \leq p \leq 1)$が与えられたもとで頂点Aから頂点Dへ線分をたどって到達可能である確率を$f(p)$で表すとする．このとき，$f(p) + f(1-p) = 1$を示せ.

問題9. (N.K. さん) 正三角形 ABC に対して、$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ をみたす点 P の軌跡を求めよ。