

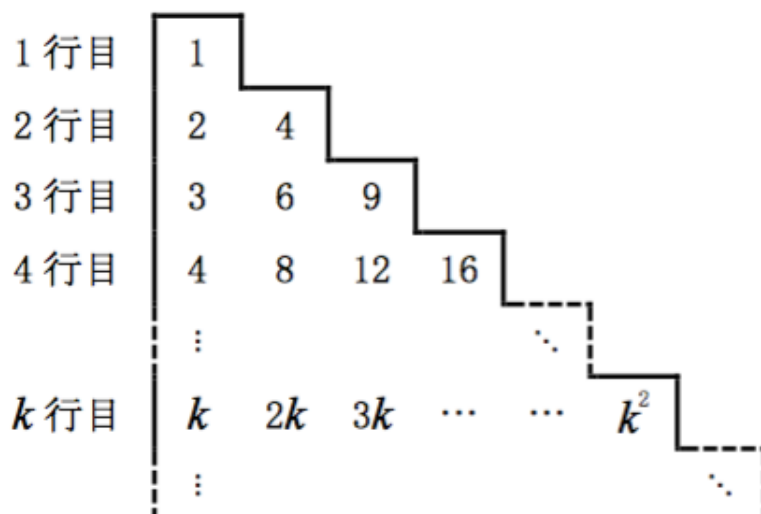
数学の決闘 ~ 日本数学オープン SP ~ 予選

2016年10月5日

1 第二ステージ

問題 1. 次のような規則に従って自然数を三角形形状に並べました。

[規則] 上から k 行目には、 k の倍数のうち正であるものを小さい方から k 個を順に並べる。



1 行目から n 行目までに並んだ自然数の積を P_n とし、 P_n が 2^e で割り切れるような自然数 e の最大値を考えます。例えば、 $n = 4$ の場合、

$$P_4 = 1 \times 2 \times 4 \times 3 \times 6 \times 9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16 = 2^{15} \times 3^5$$

で、このとき e がとりうる最大の自然数は 15 です。

では、 $n = 32$ のときにおける e がとりうる最大の自然数は何でしょうか。

問題作成者 *tb_lb* さん

問題 2. 下の式で同じ文字（かな、漢字）は同じ数を、異なる文字は異なる数を表しています。元の式を復元した時（う）×（か）はいくつですか。

$$\begin{array}{r}
 \text{す う が く} \\
 + \quad \text{ぶ ん か} \\
 \hline
 \text{が 輝 く 跳 ぶ}
 \end{array}$$

問題作成者 ばお象さん

問題 3. 25^{25} を 2^5 で割ったときのあまりを求めよ。

問題作成者 中島拓哉さん（福岡応用数学科大学生）

問題 4. あなたは今、とある長寿バラエティ番組にゲスト出演している。あなたの前には、それぞれ A, B, C と書かれた 3 枚の扉がある。3 枚のうち 1 枚は 100 万円が貰えるアタリの扉、残りの 2 枚はティッシュが貰えるハズレの扉である。3 枚の扉がアタリである事象は、同様に確からしいことがわかっている。あなたが A の扉を選んだところ、司会者が B の扉を開け、 B がハズレであることを示した。そこで司会者が言った。「今ならまだ、 C の扉に変えても構いませんよ？」さて、アタリを引きたいあなたは、 C の扉に変えるべきだろうか、それともこのまま A の扉を開けるべきだろうか。根拠とともに答えよ。なお、もちろん司会者は正解を知っており、あなたがアタリを選んでいようかハズレを選んでいようか、必ず（あなたが選んでいない）ハズレの扉を 1 枚開ける。また、あなたはこの番組の大ファンであり、第 1 回からすべての放送を見ている。そして、この司会者には、挑戦者（あなた）が A の扉を選んだとき、 B がハズレなら、必ず B の扉を開ける癖があることを突き止めている。

問題作成者 キグロさん（日曜数学会）

問題 5. $n = 1, 2, 3, \dots, 2015, 2016$ に対して有限数列 $\{a_n\}$ を $a_n = \frac{2016 - n}{n}$ と定めます。このとき、次の式で定められた S の値を求めてください。

$$S = \sum_{k=1}^{2016} \frac{a_k^2}{a_k^2 + 1}$$

問題作成者 *tb_lb* さん