数学の決闘　〜日本数学オープンSP〜
予選

2016 年 10 月 5 日

1　第三ステージ

問題 1. $\sqrt[3]{2}^2 = a\sqrt[3]{2} + b$ となる有理数 a, b は存在するか。存在するならその例を挙げ、存在しない場合はその証明をせよ。

　問題作成者 後藤慶太さん（京都大学）

問題 2. 下のような 4×4 のマスからなる表があり、次のような条件を満たすように 1 から 16 までの整数を 1 つずつ、重複することなく埋めます。

ア			
	イ		
		ウ	

【条件】16 マスのうち 8 マスを黒く塗りつぶし、どの行、ならびに、どの列も 2 個ずつの数が残るようにしたとき、塗りつぶすマスをどのように選んでも、塗りつぶされずに残った 8 マスに書かれた数の和が元の 16 マスに書かれた数の和のちょうど半分になる。

　ア、イ、ウに入る数を順に 10, 4, 5 とするとき、*(1)* 残りのマスを埋めて条件を満たす表を 1 つ完成させましょう。*(2) (1)* で完成された表が条件を満たすことを証明してください。

　※下の図 1 の場合、図 2 のように塗りつぶすと残り 8 マスの和は全 16 マスの和の半分になりますが、図 3 のように塗りつぶすと半分になりません。よって、図 1 は条件を満たさない埋め方となります。

10	8	7	14
9	4	3	12
15	1	5	11
16	2	6	13

図 1

10	8	7	14
9	4	3	12
15	1	5	11
16	2	6	13

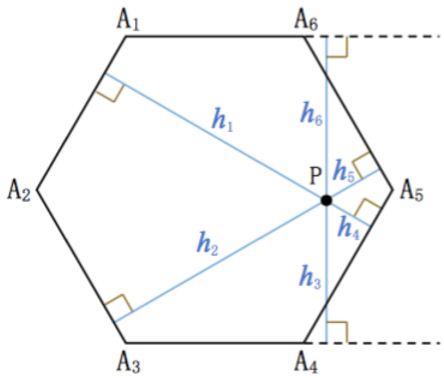
図 2

10	8	7	14
9	4	3	12
15	1	5	11
16	2	6	13

図 3

問題作成者 *tb_lb* さん

問題 3. 正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ があり、その内部に点 P をとります。点 P から辺 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ までの距離を $h_1, h_2, \ldots, h_6$ とします。ここでいう「点 P と辺 A_1A_2 までの距離」とは、辺 A_1A_2 またはその延長線上に点 P から下ろした垂線との交点と、点 P との間の距離を指すものとし、他の辺についても同様です。



$h_1, h_2, \ldots, h_6$ をうまく並び替えて、これらが等差数列となるならば

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6$$

となることを証明してください。

問題作成者 *tb_lb* さん

問題 4. $y = x^2 + ax + b|x|$ の最小値を取る x の値を a, b を用いて記述せよ。

問題 5. 以下の関数 $w(k), p(k)$ を定義します（ただし k は正の整数とします）。

$$w(k) = \frac{k-1}{2}$$
$$p(k) = m(k) - 1$$

また、関数 $m(k)$ を、k の素因数それぞれを 1 加算した数の総乗と定義します。例えば $k = 28 = 2^2 \cdot 7$ とすると $m(28) = (2+1)^2 \cdot (7+1) = 72$ となります。

次に、$f(k)$ を以下のように定義します。

$$f(k) = \begin{cases} 1 & (k = 1 \text{ or } k = 2) \\ w(k) & n \text{ が 2 以外の素数の場合} \\ p(k) & n \text{ が合成数の場合} \end{cases}$$

このとき $f(k)$ を繰り返すと 1 以外の数をループするような k をできるだけ多く挙げなさい。

例えば $k=4$ とすると

$$
\begin{aligned}
&f(4)=8, f(8)=26, f(26)=41 \\
&f(41)=20, f(20)=53, f(53)=26 \\
&f(26)=41, \ldots
\end{aligned}
$$

となり、ループが発生する。

問題作成者　岩淵勇樹さん（面白法人カヤック）