数学の決闘2018 決勝問題（全3問）

2018/10/07

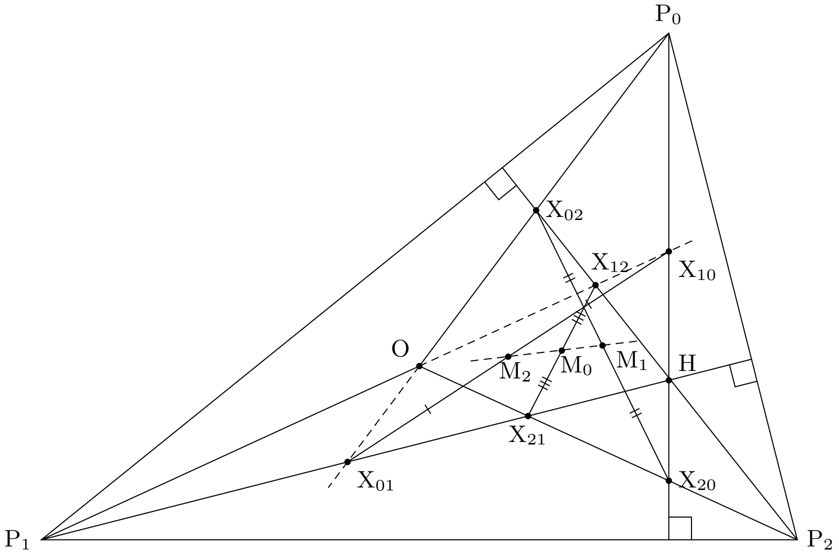
問題 1.（K さん）整数全体を $\mathbb{Z}$ とし、正の実数全体を $\mathbb{R}_{>0}$ とする。次の性質をみたす関数 v を全て求めよ。

(i) $v\colon \mathbb{Z}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}_{>0}$

(ii) $v(ab)=v(a)v(b)$

(iii) $v(a+b)\leqq\max\{v(a),v(b)\}$

問題 2.（よったんさん）$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外心を O、垂心を H とする。OP_i と HP_j の交点を X_{ij} $(i=0,\cdots,2, j=0,\cdots,2, i\neq j)$ とし、X_{ij} と X_{ji} の中点を $\mathrm{M}_{3-(i+j)}$ とする。このとき、M_i $(i=0,\cdots,2)$ が共線であることを示せ。（簡単のため、$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ は鋭角不等辺三角形を仮定してよい）



問題 3.（*tb_lb* さん） 2 次方程式 $x^2=x+1$ の正の解 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を**黄金比**と呼び、ここでは記号 ϕ で表すことにします。いま、黄金比 ϕ を底とし 0 と 1 だけからなる位取り記数法を考え、これを**黄金進法**と呼びます。黄金進法のうち、1 が連続した箇所を持たないものを特に**標準形**と呼ぶことにします。たとえば、$1001.01_{(\phi)}\ (=\phi^3+1+\phi^{-2})$ は黄金進法の標準形で表された数です。

ここで、十進法の整数を黄金進法の標準形で表すことを考えます。$\phi^2=\phi+1$ より $100_{(\phi)}=11_{(\phi)}$ に気をつけると

$$2_{(10)}=1_{(\phi)}+1_{(\phi)}=1_{(\phi)}+0.11_{(\phi)}=1.11_{(\phi)}=10.01_{(\phi)}$$
$$3_{(10)}=2_{(\phi)}+1_{(\phi)}=10.01_{(\phi)}+1_{(\phi)}=11.01_{(\phi)}=100.01_{(\phi)}$$

より、十進法の 2 と 3 は黄金進法の標準形では 10.01, 100.01 と表されます。

なお、数の右下に付けた (ϕ) と (10) はそれぞれ黄金進法、十進法の数であることを表しています。

(1) 十進法の 4, 5, 6, 7, 18 をそれぞれ黄金進法の標準形で表してください。

(2) $n=1,2,3,\cdots$ に対し、次のように数列 $\{a_n\}$ を定めます。

$$\{a_n\}: 1_{(\phi)}, 101.01_{(\phi)}, 10101.0101_{(\phi)}, 1010101.010101_{(\phi)}, \cdots$$

この数列は、$2n-1$ 桁の整数部と $2n-2$ 桁の小数部からなり、1 と 0 が交互に並ぶ黄金進法による数からなっています。$n=1,2,3,\cdots$ に対し、この数列で連続して並ぶ 2 つの数 a_n と a_{n+1} は十進法で互いに素であることを証明してください。なお、数列 $\{a_n\}$ のどの項も十進法で整数となることは証明する必要はありません。

（以下余白）