演習形式で学ぶ圏論の基礎の基礎（当日配布版）

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2021 年 9 月 5 日

> La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes.
>
> Science et Méthode, Henri Poincaré

目次

1　はじめに

今回の講座の目標は、圏論の考え方を使って説明できる簡単な現象を紹介することです。具体的には「随伴関手の極限余極限の保存」という事実について、この事実を通して説明できる具体例である「写像による部分集合の像および逆像と和集合共通部分の関係」を紹介します。そのために、圏や関手の定義から始めて、随伴関手とは何か、極限余極限とは何か、を簡単な例とともに紹介します。

圏論における非常に重要な概念として自然変換がありますが、今日の講座では自然変換については一切扱いません。ただし、随伴の定義の中でこっそり出てきます。

このテキストの構成について説明します。まずは初めに圏などの概念を記述するための基礎として集合と写像について簡単に説明します。また集合や写像に関して圏論の言葉で扱うことができる例についても紹介します。次に圏の定義を説明しますが、いきなり圏の定義を説明するのではなく、圏よりも単純な概念であるグラフとモノイドという概念を先に説明します。これらは、圏の定義を理解する助けとなると同時に、グラフたちの構成する圏やモノイドたちの構成する圏など、圏の具体例を提供するものです。圏の定義を説明した後は、一つの圏の中で説明することができる圏論の概念である極限と余極限を扱います。目標である事実に関連して、部分集合の和や共通部分などが極限や余極限として理解できることを説明します。次に二つの圏の関係を記述する概念である関手について説明します。最後に二つの関手の特別な関係である随伴について説明し、随伴の考え方を用いて理解できる現象の例をいくつか紹介します。

圏論を学ぶために web 上でご覧いただける資料を紹介します。名古屋大学情報学部・情報学研究科の木原貴行先生による圏と論理へのいざない・レクチャーノートは今回の講座と同じようにグラフの話から始めていて少ない予備知識で読めることと、論理と圏論の関係について書かれています。壱大整域は圏論について基本的な部分から非常に豊富な解説がありますが、多少数学に慣れている人向けです。ゆる圏 YouTube ではベーシック圏論の内容を丁寧に解説されています。梅崎自作の資料として、圏論の基本的な内容から米田の補題を目標としたノートをこちらのページからご覧いただけます。こちらには自然変換も書いてあります。また、グラフの圏についての動画を YouTube のチャンネルに投稿する予定なのでご覧ください。

すうがくぶんかでは 10 月から後期集団講座を開講します。いずれも zoom を用いたオンライン講座で、アーカイブは 2 年間ご視聴いただけます。梅崎が担当する講座は『ベーシック圏論』を教科書にした講座と『線形代数の世界』を教科書にした講座で、この二講座については演習問題の添削を行います。質問対応、添削の対応も視聴期限と同じく 2 年間です。また、4 月から 8 月には『集合と位相』の講座を行いました。こちらは録画をご覧いただけます。もしご興味あれば各講座のページから詳細をご覧ください。

2 集合と写像

集合とはものの集まりのことで、別の言い方をすると何かが属するか属さないかを記述できるものである。つまり、X が集合であれば $a \in X$ であるか $a \notin X$ であるかが a に応じて決まっている。$a \in X$ であることを a は X の要素であるという。

自然数は 0 以上の整数のこととする。自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

集合は中かっこ $\{,\}$ を用いて記述する。要素を全て列挙する方法で $\{0,1,2,3\}$ などと表す方法と、その集合に属する条件を用いて表す方法 $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\}$ がある。よく $\{f(x) \mid x \in X\}$ という形の記法が用いられるが、これは略記である。例えば 0 以上の偶数全体の集合 $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $\{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m$ となる $m \in \mathbb{N}$ が存在する。$\}$ の略記である。

写像は二つの集合の要素同士の対応である。これは計算方法や手続きではないことに注意しよう。写像 f が X の要素を Y の要素に対応させるということを $f : X \to Y$ と表す。

2.1 冪集合

集合 X の要素のうち一部分を集めてできる集合が X の部分集合である。一部分とはいっても、実際には X 自身も X の部分集合であり、要素を一つも持たない集合である空集合 $\emptyset$ も X の部分集合である。

定義 2.1 (部分集合)**.** 集合 Y が集合 X の**部分集合**であるとは、任意の x について「$x \in Y$ ならば $x \in X$」が成り立つことをいう。このことを $Y \subset X$ と表す。

例 2.2. $X = \{0,1\}$ であれば、X の部分集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, X$ の合計 4 つ。

命題 2.3. 集合 X, Y に対して $X = Y$ であることは $X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ であることと同値である。

X の部分集合を全て集めた集合が存在する。これを X の冪集合という。

定義 2.4 (冪集合)**.** 集合 X に対して、その部分集合を全て集めた集合を**冪集合**といい $P(X)$ と書く。つまり、$P(X) = \{x \mid x \subset X\}$ である。

例 2.5. $X = \{0,1\}$ であれば、$P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, X\}$ である。

問題 2.6. $X = \{0,1,2\}$ のとき $P(X)$ はどのような集合か。

解答. $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, X\}$

集合 X の部分集合が与えられたとき、そこから新しい部分集合を作る操作がある。

定義 2.7 (和集合)**.** 集合 X の部分集合 A, B に対してその**和集合** $A \cup B$ とは $\{x \in X \mid x \in A$ または $x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 2.8. $X = \{0,1,2,3\}, A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$ に対し、$A \cup B = \{0,1,2\}$ である。

和集合は次のように特徴付けることができる。集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cup B$ は A も B も含む X の部分集合の中で包含関係について最小のものである。

同じことを少し言い換えると次のようになる。

命題 2.9. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \subset A \cup B$ かつ $B \subset A \cup B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $A \cup B \subset T$ である。

例 2.10. $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$ とする。$T \subset X$ であって $A \subset T$ かつ $B \subset T$ を満たすものは $\{0, 1, 2\}$ と $\{0, 1, 2, 3\}$ の二つあり、$A \cup B = \{0, 1, 2\}$ であった。

定義 2.11 (共通部分)**.** 集合 X の部分集合 A, B にたいして、その**共通部分** $A \cap B$ とは $\{x \in X \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$ により定まる集合のこと。

例 2.12. $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ に対し、$A \cap B = \{1, 2\}$ である。

共通部分は次のように特徴付けることができる。集合 X の部分集合 A, B に対して、$A \cap B$ は A にも B にも含まれる X の部分集合の中で包含関係について最大のものである。

こちらも上と同じように言い換える。

命題 2.13. 集合 X と $A, B \in P(X)$ に対して、

1. $A \cap B \subset A$ かつ $A \cap B \subset B$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$T \subset A$ かつ $T \subset B$」ならば $T \subset A \cap B$ である。

例 2.14. $X = \{0, 1, 2, 3\}, A = \{0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ とする。$T \subset X$ であって $T \subset A$ かつ $T \subset B$ を満たすものは $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ であり、$A \cap B = \{1, 2\}$ であった。

集合 X の冪集合 $P(X)$ においては次も成立する。

命題 2.15. X を集合とする。$X, \emptyset \in P(X)$ は次を満たす。

1. 任意の $T \in P(X)$ に対し $T \subset X$ が成り立つ。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対し $\emptyset \subset T$ が成り立つ。

つまり、X は $P(X)$ の中で包含関係について最大であり、$\emptyset$ は包含関係について最小である。

これらの特徴づけを定義に採用することができる。例えば和集合であれば次のようにする。

定義 2.16. X を集合とし、$A, B \in P(X)$ とする。$C \in P(X)$ が A と B の和集合であるとは、以下の二条件を満たすことをいう。

1. $A \subset C$ かつ $B \subset C$ である。
2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$A \subset T$ かつ $B \subset T$」ならば $C \subset T$ である。

問題 2.17. 共通部分の定義についても上のように書き換えよ。

解答. X を集合とし、$A, B \in P(X)$ とする。$C \in P(X)$ が A と B の共通部分であるとは、以下の二条件を満たすことをいう。

1. $C \subset A$ かつ $C \subset B$ である。

2. 任意の $T \in P(X)$ に対して「$T \subset A$ かつ $T \subset B$」ならば $T \subset C$ である。

ただし、このような定義の仕方には注意が必要である。定義が存在を保証するとは限らない。一意性も保証するとは限らない。これが共通部分です、と一つ具体的に定めるのではなく、こういう性質を満たすものを共通部分と言います、という定義になっている。

一般的には存在や一意性を保証するものではないが、今の和集合の場合であれば $A \cup B$ が二つ目の定義の意味で和集合であり、しかもこの条件を満たすものは $A \cup B$ と一致する。つまり、一意的に存在することがわかる。

$P(X)$ における $X, \emptyset, A \cup B, A \cap B$ が満たす上の性質は、自然数における次の事実と似ている。

1. 1 はあらゆる自然数の約数である。
2. 0 はあらゆる自然数の倍数である。
3. a と b の最小公倍数 l は a の倍数かつ b の倍数であり、かつ t が a の倍数かつ b の倍数であれば t は l の倍数である。
4. a と b の最大公約数 g は a の約数かつ b の約数であり、かつ t が a の約数かつ b の約数であれば t は g の約数である。

これらはのちに圏における始対象、終対象、和、積などの概念として捉えられることを説明する。

2.2 写像

次に写像について簡単に説明する。写像というのは関数と同じと思ってよく、数に関係する場合に関数と呼ぶことが多い。関数というと何らかの変換規則みたいなイメージを持つかもしれないが、数学では二つの集合の要素たちの単なる対応づけでしかない。対応規則を数式や文章で記述できるかどうか、あるいはその計算手続きなどは問題にならない。

定義 2.18 (写像). f が集合 X から Y への**写像**である、全ての X の要素に対してある Y の要素を定まっていることをいう。$x \in X$ に f によって対応する Y の要素を $f(x)$ と表す。f が X から Y への写像であることを $f : X \to Y$ と表す。

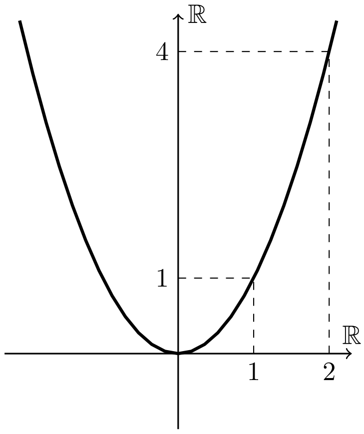
定義 2.19 (写像の相等). 集合 X, Y とその間の写像 $f : X \to Y, g : X \to Y$ について、$f = g$ であるとは任意の $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ であることをいう。

関数のグラフを書いたの同じように、写像もグラフを定めることができる。X や Y が小さければ次のような表を書いて理解できる。例えば $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ として $f : X \to Y$ を $f(0) = 4, f(1) = 3, f(2) = 4$ として定めたものは、とグラフを書くことができる。

	0	1	2
3		○	
4	○		○

中学や高校で習ったように、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ であればそのグラフを xy 平面に書くことができる。

例 2.20. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める。このグラフは次のようになる。



問題 2.21. 上の集合 $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ に対して X から Y への写像は上の f 以外にはどのようなものがあるか？全て列挙せよ。

解答. グラフを書くと

	0	1	2
3	○	○	○
4			

	0	1	2
3		○	○
4	○		

	0	1	2
3	○		○
4		○	

	0	1	2
3			○
4	○	○	

	0	1	2
3	○	○	
4			○

	0	1	2
3		○	
4	○		○

	0	1	2
3	○		
4		○	○

	0	1	2
3			
4	○	○	○

問題 2.22. $S = \{0\}$ とし、X を空集合ではない集合とする。集合 X から S への写像にはどのようなものがあるか？また S から集合 X への写像にはどのようなものがあるか？

解答. X から S の写像は全ての $x \in X$ に対して $f(x) = 0$ により定まる $f : X \to S$ ただひとつ。S から X への写像は $x \in X$ ごとに $f(0) = x$ とすることで定まる $f : S \to X$ が X の要素と同じだけある。

問題 2.23. $S = \{0\}, X = \{1, 2\}$ に対して上の事実を確かめよ。

解答. X から S への写像のグラフを全て列挙すると

	1	2
0	○	○

のみ。

S から X への写像のグラフを全て列挙すると

	0
1	○
2	

	0
1	
2	○

が全て。

X, Y, Z を集合とし、$f : X \to Y, g : Y \to Z$ をそれらの間の写像とする。この二つの写像を**合成**することで新しく写像を定めることができる。

1. X の要素 x から写像 f を使って $f(x) \in Y$ を対応させる。
2. 次にこの Y の要素 $f(x)$ から写像 g を使って $g(f(x)) \in Z$ を対応させる。

このようにして定義される写像が f と g の合成写像 $g \circ f$ である。

定義 2.24 (合成写像)**.** 写像 $f: X \to Y$ と $g: Y \to Z$ の合成写像 $g \circ f: X \to Z$ とは、次で定まる X から Z への写像。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

この式の読み方は $g \circ f$ が新しい写像の名前で、それを計算する手続きが $g(f(x))$ で与えられるということ。

例 2.25. 自然数 n に対して、その次の自然数を対応させることにより写像 $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。つまり

$$s(n) = n + 1$$

と定める。

上の $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, s(n) = n + 1$ を合成して $s \circ s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を定める。これは

$$(s \circ s)(n) = s(s(n)) = s(n+1) = (n+1) + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$$

となり、自然数 n に対してその次の次の自然数を対応させる写像。

問題 2.26. 上の例の記号のもとで、$s \circ (s \circ s), (s \circ s) \circ s$ はどのような写像か？

解答.

$$\begin{aligned}(s \circ (s \circ s))(n) &= s((s \circ s)(n)) = s(n+2) = n + 3 \\ ((s \circ s) \circ s)(n) &= (s \circ s)(s(n)) = (s \circ s)(n+1) = (n+1) + 2 = n + 3\end{aligned}$$

写像の合成は結合的である。

命題 2.27. 集合 W, X, Y, Z とそれらの間の写像 $f: W \to X, g: X \to Y, h: Y \to Z$ について、$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成り立つ。

証明. 写像の等式を示すためには任意の $x \in X$ に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

であることを示せばよい。左辺は

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

であり、右辺は

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

であるのでこれらは一致する。 □

集合 X に対して定義域と行き先が X であるような写像のうちで特別なものがある。

定義 2.28 (恒等写像)**.** X を集合とする。恒等写像 $\mathrm{id}_X: X \to X$ とは、$\mathrm{id}_X(x) = x$ で定まる写像のこと。

問題 2.29. 集合 X, Y とその間の写像 $f: X \to Y$ に対し、$\mathrm{id}_Y \circ f = f, f \circ \mathrm{id}_X = f$ が成り立つことを証明せよ。

解答. 両辺が全ての x に対して同じ Y の要素に対応すればよい。一つ目の式の左辺は $(\mathrm{id}_Y \circ f)(x) = \mathrm{id}_Y(f(x)) = f(x)$ であるので、右辺の x の行き先と一致する。二つ目の式の左辺は $(f \circ \mathrm{id}_X)(x) = f(\mathrm{id}_X(x)) = f(x)$ であるので、右辺の x の行き先と一致する。

例 2.30. $X = \{0, 1\}$ とする。写像 $X \to X$ を全て書くと

	0	1
0	○	
1		○

	0	1
0	○	○
1		

	0	1
0		○
1	○	

	0	1
0		
1	○	○

である。これに順に f_0, f_1, f_2, f_3 と名前をつけることにする。$f_0 = \mathrm{id}_X$ である。

これらの合成規則がどのようになるか、表にまとめよう。ここでは a の行 b の列に対して $b \circ a$ を書き込むことにする。

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

可換図式というのはいくつかの写像の合成の等式を可視化したものである。いくつかの集合とそれらの間の写像を図で表す。その合成についての等式が成立することを図式が可換であるという。

例 2.31. $W = \{0, 1\}, X = \{2, 3, 4\}, Y = \{5, 6\}, Z = \{7, 8, 9\}$ とする。$f : W \to X, g : W \to Y, h : X \to Z, i : Y \to Z$ をそれぞれ次のグラフで定める。

f	0	1
2		
3	○	
4		○

g	0	1
5		○
6	○	

h	2	3	4
7			
8	○	○	
9			○

i	5	6
7		
8		○
9	○	

すると以下の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & Z \\ W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u, "h"] \end{tikzcd}$$

一方で j を

j	2	3	4
7			
8	○	○	○
9			

と定めると以下の図式は可換ではない。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] & Z \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}$$

問題 2.32. W, X, Y, Z, f, g, i は上の例と同じものとする。図式

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i"] & Z \\
W \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"] & X \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

を可換にするような X から Z への写像は何通りあるか。

解答.

	2	3	4
7	○		
8		○	
9			○

	2	3	4
7			
8	○	○	
9			○

	2	3	4
7			
8		○	
9	○		○

の 3 つ。

写像を使って集合の情報を取り出すことができる。

例 2.33. 集合 X から $\{0, 1\}$ への写像は X の部分集合を考えるのと同じである。例えば $X = \{0, 1, 2\}$ として X から $\{0, 1\}$ への写像は以下で全て。

	0	1	2
0	○	○	○
1			

	0	1	2
0		○	○
1	○		

	0	1	2
0	○		○
1		○	

	0	1	2
0			○
1	○	○	

	0	1	2
0	○	○	
1			○

	0	1	2
0		○	
1	○		○

	0	1	2
0	○		
1		○	○

	0	1	2
0			
1	○	○	○

一方で $P(X) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, X\}$ である。

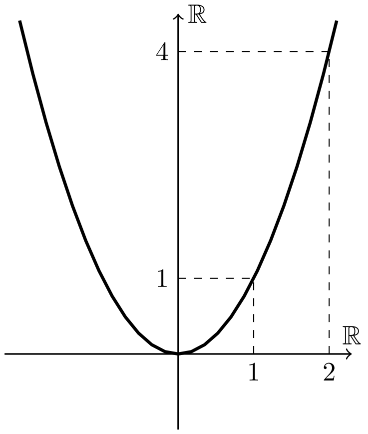
次に写像 $f : X \to Y$ を用いて X の部分集合と Y の部分集合の間の対応を二つ定める。

定義 2.34 (像)**.** f を集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ とする。部分集合 $U \subset X$ の f による像とは $f_*(U) = \{f(x) \mid x \in U\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X (y = f(x))\} \subset Y$ のこと。

定義 2.35 (逆像)**.** f を集合 X から集合 Y への写像 $f : X \to Y$ とする。部分集合 $V \subset Y$ の f による逆像とは $f^*(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$ のこと。

像や逆像には通常 f, f^{-1} の記号が使われるが、これは紛らわしいので今回は f_*, f^* を用いることにする。中学や高校で習う話で言うと、像は関数の値域を求めること、逆像は不等式を解くことに相当する。

例 2.36. X, Y を共に実数全体の集合 $\mathbb{R}$ とし、$f: X \to Y$ を $f(x) = x^2$ により定める。



$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}, f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < -1$ または $1 < x < \sqrt{2}\}$ である。

問題 2.37. 上と同様に $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ により定めたとき、$f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}), f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\})$ を求めよ。

解答. $f_*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}, f^*(\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ である。

例 2.38. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ とする。
$f: X \to Y$ を $f(0) = f(1) = 3, f(2) = 4$ により定める。

	0	1	2
3	○	○	
4			○

$f_*(\{0, 1\}) = \{3\}, f_*(\{0, 2\}) = \{3, 4\}, f^*(\{3\}) = \{0, 1\}, f^*(\{4\}) = \{2\}$ である。

問題 2.39. $g: Y \to X$ を $f(3) = g(4) = 0$ により定める。

	3	4
0	○	○
1		
2		

$g_*(\{3\}), g_*(\{3, 4\}), g^*(\{0\}), g^*(\{1, 2\})$ を求めよ。

解答. $g_*(\{3\}) = \{0\}, g_*(\{3, 4\}) = \{0\}, g^*(\{0\}) = \{3, 4\}, g^*(\{1, 2\}) = \emptyset$ である。

以上の f^*, f_* はそれぞれ冪集合の間の写像 $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を定めている。これは包含関係について、次のような性質を持つ。

命題 2.40. f を集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ とする。

1. $A, B \in P(X)$ が $A \subset B$ のとき $f_*(A) \subset f_*(B)$ である。
2. $C, D \in P(Y)$ が $C \subset D$ のとき $f^*(C) \subset f^*(D)$ である。

集合 X から集合 $P(X)$ を定め、写像 $f : X \to Y$ から $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ を対応させることができる。この対応は**関手的**である。つまり、集合 X, Y, Z とその間の写像 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ と $A, D \in P(Z), B, C \in P(X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
f^*(g^*(A)) &= (g \circ f)^*(A) \\
\mathrm{id}_X^*(B) &= B \\
g_*(f_*(C)) &= (g \circ f)_*(C) \\
(\mathrm{id}_X)_*(D) &= D
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

さて、写像 $f : X \to Y$ が与えられた時、冪集合の間の写像 $f_* : P(X) \to P(Y), f^* : P(Y) \to P(X)$ が定まった。一方で、冪集合には $\cap, \cup$ により要素を関係づけることができた。これらの関係について調べよう。

命題 2.41. X, Y を集合とし、$f : X \to Y$ を写像とする。集合 X の部分集合 A, B 及び集合 Y の部分集合 C, D に対し

$$
\begin{aligned}
f_*(A \cap B) &\subset f_*(A) \cap f_*(B) \\
f_*(A \cup B) &= f_*(A) \cup f_*(B) \\
f^*(C \cap D) &= f^*(C) \cap f^*(D) \\
f^*(C \cup D) &= f^*(C) \cup f^*(D)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

この性質を使うと、像や逆像を計算したいときにより簡単な場合に帰着できる。いろいろな計算の順序を入れ替えることができるかと言うのは数学でよくある話で、例えば x, y を正の実数としたとき $(xy)^2 = x^2y^2$ とか $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ は成り立つが、$(x+y)^2 = x^2 + y^2$ とか $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ などは一般には成り立たない。

例 2.42. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定める。$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ とする。$f_*(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}, f_*(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ である。また、$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ であり、$f_*(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ である。よって $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ は成り立つ。$A \cap B = \{0\}$ であり、$f_*(A \cap B) = \{0\}$ である。よって $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ は成り立たない。

$f^*(A) = \{0\}, f^*(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ である。$f^*(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ である。よって $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$ は成り立つ。$f^*(A \cap B) = \{0\}$ である。よって $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$ は成り立つ。

問題 2.43. $X=\{0,1,2\}, Y=\{3,4\}$ とし、$f: X \to Y$ を以下のグラフで定める。

	0	1	2
3	$\circ$	$\circ$	
4			$\circ$

このとき、$A, B \subset X$ を適切に定めて $f_*(A \cap B) = f_*(A) \cap f_*(B)$ が成り立たないようにせよ。

解答. $A=\{0,2\}, B=\{1,2\}$ とすると、$f_*(A)=\{3,4\}, f_*(B)=\{3,4\}$ となるので、$f_*(A) \cap f_*(B)=\{3,4\}$ である。一方で $A \cap B=\{2\}$ であり、$f_*(A \cap B)=\{4\}$ である。

$A=\{0\}, B=\{1\}$ などでもよい。

上の事実は集合の基本的な性質を使って証明できることができる。

証明.

1. $f_*(A \cap B) \subset f_*(A) \cap f_*(B)$ を示す。$y \in Y$ に対して以下の二条件は同値となる。
   (a) $y \in f_*(A \cap B)$
   (b) $f(x)=y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する。
   また、以下の三条件は同値となる。
   (a) $f(x)=y$ となる $x \in A$ が存在し、かつ $f(x)=y$ となる $x \in B$ が存在する。
   (b) $y \in f_*(A)$ かつ $y \in f_*(B)$
   (c) $y \in f_*(A) \cap f_*(B)$
   さらに、「$f(x)=y$ となる $x \in A \cap B$ が存在する」ならば「$f(x)=y$ となる $x \in A$ が存在し、かつ $f(x)=y$ となる $x \in B$ が存在する」が成り立つ。
   以上より示される。
2. $f_*(A \cup B) = f_*(A) \cup f_*(B)$ を示す。$y \in Y$ に対して以下の条件は同値になる。
   (a) $y \in f_*(A \cup B)$
   (b) $y=f(x)$ となる $x \in A \cup B$ が存在する
   (c)「$y=f(x)$ となる $x \in A$ が存在する」または「$y=f(x)$ となる $x \in B$ が存在する」
   (d) $y \in f_*(A)$ または $y \in f_*(B)$
   (e) $y \in f_*(A) \cup f_*(B)$
   以上より示される。
3. $f^*(C \cap D) = f^*(C) \cap f^*(D)$ を示す。$x \in X$ に対して以下の条件は同値である
   (a) $x \in f^*(C \cap D)$
   (b) $f(x) \in C \cap D$
   (c) $f(x) \in C$ かつ $f(x) \in D$
   (d) $x \in f^*(C)$ かつ $x \in f^*(D)$
   (e) $x \in f^*(C) \cap f^*(D)$
   以上より示される。
4. $f^*(C \cup D) = f^*(C) \cup f^*(D)$ を示す。$x \in X$ に対して以下の条件は同値である
   (a) $x \in f^*(C \cup D)$
   (b) $f(x) \in C \cup D$
   (c) $f(x) \in C$ または $f(x) \in D$
   (d) $x \in f^*(C)$ または $x \in f^*(D)$
   (e) $x \in f^*(C) \cup f^*(D)$

以上より示される。

□

特徴付けを使った証明を試みる。

証明.

1. $f_*(A\cap B)\subset f_*(A)\cap f_*(B)$ を示す。$A\cap B\subset A$ より $f_*(A\cap B)\subset f_*(A)$ である。$A\cap B\subset B$ より $f_*(A\cap B)\subset f_*(B)$ である。よって共通部分の特徴付けから、$f_*(A\cap B)\subset f_*(A)\cap f_*(B)$ である。
2. $f_*(A\cup B)=f_*(A)\cup f_*(B)$ を示す。$A\subset A\cup B$ より $f_*(A)\subset f_*(A\cup B)$ である。$B\subset A\cup B$ より $f_*(B)\subset f_*(A\cup B)$ である。よって和集合の特徴付けから、$f_*(A)\cup f_*(B)\subset f_*(A\cup B)$ である。
逆はどうか？ $f_*(A)\subset T$ かつ $f_*(B)\subset T$ ならば $f_*(A\cup B)\subset T$ であることを示したい。
3. $f^*(C\cap D)=f^*(C)\cap f^*(D)$ を示す。$C\cap D\subset C$ より $f^*(C\cap D)\subset f^*(C)$ である。$C\cap D\subset D$ より $f^*(C\cap D)\subset f^*(D)$ である。よって共通部分の特徴付けから $f^*(C\cap D)\subset f^*(C)\cap f^*(D)$ である。
逆はどうか？ $T\subset f^*(C)$ かつ $T\subset f^*(D)$ ならば $T\subset f^*(C\cap D)$ であることを示したい。
4. $f^*(C\cup D)=f^*(C)\cup f^*(D)$ を示す。$C\subset C\cup D$ より $f^*(C)\subset f^*(C\cup D)$ である。$D\subset C\cup D$ より $f^*(D)\subset f^*(C\cup D)$ である。よって和集合の特徴付けから $f^*(C)\cup f_*(D)\subset f^*(C\cup D)$ である。
逆はどうか？ $f^*(C)\subset T$ かつ $f^*(D)\subset T$ ならば $f^*(C\cup D)\subset T$ であることを示したい。

□

上の証明を完結させるために、f_* と f^* の関係について簡単に説明しよう。まずさらに、$f_*(A)\subset B$ ならば $A\subset f^*(B)$ が成り立つ。また、さらに、$A\subset f^*(B)$ ならば $f_*(A)\subset B$ が成り立つ。

問題 2.44. f を集合 X,Y の間の写像 $f:X\to Y$ とする。

1. $A\in P(X)$ に対し $A\subset f^*(f_*(A))$ が成り立つ。
2. $B\in P(Y)$ に対し $f_*(f^*(B))\subset B$ が成り立つ。
3. $A\in P(X)$ と $B\in P(Y)$ に対し、$f_*(A)\subset B$ と $A\subset f^*(B)$ が同値である。

この事実についてグラフを描いて理解してみよう。

証明.

1. $A\in P(X)$ とする。$x\in A$ とする。$f(x)\in f_*(A)$ である。よって $x\in f^*(f_*(A))$ である。
2. $B\in P(Y)$ とする。$y\in f_*(f^*(B))$ とする。$y=f(x)$ となる $x\in f^*(B)$ が存在する。この x は $f(x)\in B$ を満たす。よって $y=f(x)\in B$ である。
3. $A\in P(X),B\in P(Y)$ とする。
まず $f_*(A)\subset B$ ならば $A\subset f^*(B)$ を示そう。$f_*(A)\subset B$ より $f^*(f_*(A))\subset f^*(B)$ である。$A\subset f^*(f_*(A))$ なので $A\subset f^*(B)$ である。
次に $A\subset f^*(B)$ ならば $f_*(A)\subset B$ を示そう。$A\subset f^*(B)$ より $f_*(A)\subset f_*(f^*(B))$ である。$f_*(f^*(B))\subset B$ なので $f_*(A)\subset B$ である。

□

それでは先ほどの証明の続きを行おう。

証明. $f_*(A)\subset T$ かつ $f_*(B)\subset T$ ならば $f_*(A\cup B)\subset T$ であることを示したい。$f_*(A)\subset T$ より $A\subset f^*(T)$ である。$f_*(B)\subset T$ より $B\subset f^*(T)$ である。よって $A\cup B\subset f^*(T)$ である。よって $f_*(A\cup B)\subset T$ である。

$T \subset f^*(C)$ かつ $T \subset f^*(D)$ ならば $T \subset f^*(C \cap D)$ であることを示したい。$T \subset f^*(C)$ より $f_*(T) \subset C$ である。$T \subset f^*(D)$ より $f_*(T) \subset D$ である。よって $f_*(T) \subset C \cap D$ である。よって $T \subset f^*(C \cap D)$ である。 □

$f^*(C) \subset T$ かつ $f^*(D) \subset T$ ならば $f^*(C \cup D) \subset T$ であることを示すにはこのやり方ではうまくいかない。

2.3 直和と直積と Set

集合の直和と直積について簡単に紹介する。これは部分集合に対する和集合や共通部分とは異なることに注意しよう。

まず直積だが、これは xy 座標平面や 2 次元の表が直積として想定するもの。要素の対を一つの要素であるかのように記述できる。二つの集合から、その直積という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合から一つずつ要素を取り出してペアを作り、それを全て集めた集合である。

定義 2.45 (直積)**.** 集合 X, Y の直積 $X \times Y$ とは

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のこと。$(x, y) = (x', y')$ であることは $x = x'$ かつ $y = y'$ で定まる。

また、射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ を $p_1(x, y) = X, p_2(x, y) = y$ でそれぞれ定義する。

例 2.46. $X = \{0, 1, 2\}, Y = \{3, 4\}$ であればその直積は $X \times Y = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ である。

	0	1	2
3	$(0, 3)$	$(1, 3)$	$(2, 3)$
4	$(0, 4)$	$(1, 4)$	$(2, 4)$

例 2.47.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 0), (1, 1), (2, 1), \ldots, (2, 0), (2, 1), (2, 2), \ldots\}$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

X から Y への写像 $f : X \to Y$ のグラフは $X \times Y$ の部分集合である。グラフを表を用いて表していたものは $X \times Y$ から $\{\circ, \}$ への写像とみなすことができ、これは部分集合と対応する。

二つの集合から、その直和という新しい集合を作る。これは、与えられた二つの集合の要素を全て集めた集合である。二つの部分集合の和集合 $\cup$ とは違うことに注意しよう。

集合 X, Y の直和 $X + Y$ とは X の要素と Y の要素を全て集めた集合だが、元々 X の要素であるものと Y の要素であるものは区別する。

定義 2.48 (直和)**.** 集合 X, Y の直和 $X + Y$ とは

$$X + Y = \{(x, 0) \text{ または } (y, 1) \mid x \in X, y \in Y\}$$

のこと。

写像 $j_1 : X \to X + Y, j_2 : Y \to X + Y$ を $j_1(x) = (x, 0), j_2(y) = (y, 1)$ により定める。

例 2.49. $X = \{0,1,2\}, Y = \{2,3,4\}$ のとき $X + Y = \{(0,0),(1,0),(2,0),(2,1),(3,1),(4,1)\}$ である。

直積と直和は次のような性質を持つ。

命題 2.50. 集合 X, Y の直積集合 $X \times Y$ と射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : T \to X, f_2 : T \to Y$ に対し、写像 $f : T \to X \times Y$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $p_1 \circ f = f_1, p_2 \circ f = f_2$ を満たすものものががただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ X & X \times Y \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & Y \end{tikzcd}$$

命題 2.51. 集合 X, Y の直和集合 $X + Y$ と埋め込み $j_1 : X \to X + Y, j_2 : Y \to X + Y$ は次を満たす。任意の集合 T と写像 $f_1 : X \to T, f_2 : Y \to T$ に対し、写像 $f : X + Y \to T$ であって次の図式が可換になる、言い換えると $f \circ j_1 = f_1, f \circ j_2 = f_2$ を満たすものものががただ一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "f_1"] & X + Y \arrow[d, "f"] & Y \arrow[l, "j_2"] \arrow[dl, "f_2"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

二つの集合から、その間の写像全てを集めて集合を作ることができる。

定義 2.52. 集合 X から集合 Y への写像全体の集合を $\mathbf{Set}(X, Y)$ とかく。

例 2.53. $\mathbf{Set}(\{0,1,2\},\{0,1\})$ は次の 8 個のグラフで定まる写像たちを要素にもつ集合である。i 行 j 列のものを f_{ij} と書くことにすると、

$$\mathbf{Set}(\{0,1,2\},\{0,1\}) = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}\}$$

とかける。

	0	1	2
0	○	○	○
1			

	0	1	2
0		○	○
1	○		

	0	1	2
0	○		○
1		○	

	0	1	2
0			○
1	○	○	

	0	1	2
0	○	○	
1			○

	0	1	2
0		○	
1	○		○

	0	1	2
0	○		
1		○	○

	0	1	2
0			
1	○	○	○

例 2.54.

$$\mathbf{Set}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \{(a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}\} = \{(0,0,0,0,\ldots),(1,0,1,1,\ldots),(0,1,2,3,\ldots),\ldots\}$$

二つの写像から写像の合成によって新しい写像を作ることができた。つまり、写像 $c : \mathbf{Set}(Y, Z) \times \mathbf{Set}(X, Y) \to \mathbf{Set}(X, Z)$ が $c(g, f) = g \circ f$ によって定義される。写像の合成も足し算や掛け算のようなもので、簡単な場合には次のような表にまとめることができる。

以前の例をもう一度確認する

例 2.55. $X = \{0, 1\}$ とする。$\mathbf{Set}(X, X)$ の要素は

	0	1
0	○	
1		○

	0	1
0	○	○
1		

	0	1
0		○
1	○	

	0	1
0		
1	○	○

である。これに順に f_0, f_1, f_2, f_3 と名前をつけることにする。$\mathbf{Set}(X, X) = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$ である。$f_0 = \mathrm{id}_X$ である。

これらの合成規則がどのようになるか、表にまとめよう。ここでは a の行 b の列に対して $c(b, a)$ を書き込むことにする。

	f_0	f_1	f_2	f_3
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_1	f_3	f_3
f_2	f_2	f_1	f_0	f_3
f_3	f_3	f_1	f_1	f_3

2.4 空集合

要素を一つも持たない集合がただ一つ存在し、それを空集合とよび $\emptyset$ で表す。これはつまらないもののようだが意外と重要で、0 の発見のようなもの。

空集合の扱いは慣れていないと難しいので改めてまとめる。

1. $\emptyset$ と X の直積 $\emptyset \times X$ は $\emptyset$ である。
2. $\emptyset$ から X への写像はただ一つ存在する。
3. X から $\emptyset$ への写像は $X = \emptyset$ のときはただ一つ、$X \neq \emptyset$ の時は存在しない。これらは写像の定義から導くことができる。
4. $\emptyset$ は如何なる集合 X に対してもその部分集合である。つまり $\emptyset \subset X$ が成り立つ。

これらは $\forall x(x \in X \to P(x))$ が $X = \emptyset$ のとき真である、さらにいうと $Q \to P$ が Q が偽なとき真であるという事実に基づく。