最適化の概要

この講座で解説する最適化問題の具体例には次のようなものがあります。

- 材料費の制約の中で、利益が最も大きくなるように製品を製造したい。何をどれだけ作ればよいか？
- 現在地から目的地までの移動ルートには複数の候補がある。最短ルートはどれか？
- 来月の仕事のシフトを作成している。必要な人員や希望休を考慮し、不満の少ないシフトを作成したい。

これらは大まかにいえば、 **決められた制約の中で利益を最大にする(または損失を最小にする)** という問題であるということができそうです。

この講座では、いろいろな最適化の手法から代表的なものを取り上げ、

- 簡単な数値例を通したアルゴリズムの理解
- Pythonによる実装(複雑な数値、大規模な問題でも解ける) の2点を紹介していきます。

最初の具体例

最適化問題についてより具体的なイメージを持つために、例題を見てみましょう。

例題 3種類の製品X,Y,Zを作っている。この製品を作るための材料はA,B,Cの3種類で、各製品を作るために使う材料の量と単位量当たりの値段をまとめると次の表のようになる。

製品	材料A	材料B	材料C	値段
X	20	15	20	100円
Y	10	5	0	30円
Z	5	10	5	50円

材料A,B,Cはそれぞれ80,60,70ずつ用意してあるとするとき、各製品をどれだけ作れば利益が最も大きくなるか。

簡単な考察

数学的な解説に入る前に、少し問題を眺めながら考察してみましょう。

製品Xの値段が最も高いことからXをたくさん作りたいところですが、材料をたくさん消費してしまう製品です。一方でYは材料はあまり必要としないのでたくさん作ることができるが値段は安い。Zはその中間といえます。

各材料にも制限がある中で利益が大きくなる配分を見つけるのは簡単ではなさそうです。

シンプルな作戦として、次のように考えてみるのはどうでしょうか。

- 値段が一番高いXを作れるだけ作る(3.5作ると材料Cがつきる)
- 残った材料の中で、次に値段が高いZを作れるだけ作る(材料Cがないから作れない)
- 最後に残った材料の中でYを作れるだけ作る(1作ると材料Aがつきる)

この考え方で配分を求めると、Xを3.5, Yを1, Zを0作ることになります。このときの利益は380円です。

悪くない方法のようにも思えるかもしれませんが、実はこれでは必ずしも最適解を得られるとは限りません(このような方法を貪欲法と言います)

問題を数式で捉える

ここからは数学らしく、数式を用いて問題を考察していきましょう。ここで得られる数式による表現はこれから学ぶ最適化問題のひな型を与えています。

1. 製品X,Y,Zをそれぞれx, y, zずつ作るとします。
2. このとき、利益は$100x + 30y + 50z$と表すことができます。この値が最大になるx, y, zを見つけることが問題のゴールです。
3. 材料Aは80まで使うことができるので$20x + 10y + 5z \leq 80$, 材料Bは60まで使うことができるので$15x + 5y + 10z \leq 60$, 材料Cは70まで使うことができるので$20x + 5z \leq 70$を満たす必要があります。また、x, y, zはすべて0以上です。

以上まとめて、次のように表現します。

$$
\begin{gathered}
Maximize\ \ 100x + 30y + 50z \\
subject\ to\ \ 20x + 10y + 5z \leq 80 \\
15x + 5y + 10z \leq 60 \\
20x + 5z \leq 70 \\
x, y, z \geq 0
\end{gathered}
$$

これは後で扱う線形最適化問題の例になっていて、$x = 3.4, y = 1.0, z = 0.4$が解になります。(解き方は後の章で)
このときの利益は390円となり、貪欲法による解よりも10円多く利益を出すことができています。

補足 x, y, zが整数値でないことに違和感があるかもしれません。実際、各製品が整数単位でしか作れない場合は整数解を見つける必要があります。この場合$x = 3, y = 1, z = 1$が解になります。また、この解は貪欲法の考え方に基づいても得ることができます(貪欲法も最適ではないけど優秀な方法に思える)