1. 多変量正規分布の性質

多変量正規分布は、n 個の確率変数の組 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ の確率分布で、ベクトル μ と正定値対称行列 Σ によって定まる確率密度関数

$$f(x_1, \cdots, x_n; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

によって定義されます。多変量正規分布は $N_n(\mu, \Sigma)$ と表されます。$n=1$ のときには μ が実数、 Σ が正の実数になり、期待値が μ, 分散が Σ の正規分布だとわかります。証明は省略しますが、以下の事実が成り立ちます。

定理 : 多変量正規分布の期待値ベクトルは μ, 分散共分散行列は Σ です。

以下では、多変量正規分布の重要な性質である再生性と条件付き分布の公式について紹介していきます。

1.1 多変量正規分布の再生性

期待値ベクトルが μ, 分散共分散行列が Σ の確率変数 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ を考えます。行列 A とベクトル b に対して

$$\mathbb{E}[AX+b] = A\mu + b$$
$$\mathbb{V}[AX+b] = A\Sigma A^T$$

が成り立ちます。$n=1$ の場合の正規分布と同様に、次の定理が成り立ちます。

定理 : $X = (X_1, \cdots, X_n) \sim N_n(\mu, \Sigma)$ とします。行列 A とベクトル b に対して、$AX + b \sim N_n(A\mu + b, A\Sigma A^T)$ が成り立ちます。

証明 : 変数変換の公式を用います。$Y = AX + b$ として、Y の確率密度関数を $f_Y(y_1, \cdots, y_n)$ と表すことにします。$X = A^{-1}(Y-b)$ が成り立つこと、

$$\det \frac{\partial X}{\partial Y} = \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned}
f_Y(y_1, \cdots, y_n) &= f(A^{-1}(Y-b))\frac{1}{\det A} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det A\Sigma A^T}} \exp\left(-\frac{1}{2}(A^{-1}(Y-b)-\mu)^T\Sigma^{-1}(A^{-1}(Y-b)-\mu)\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det A\Sigma A^T}} \exp\left(-\frac{1}{2}(Y-(A\mu+b))^T(A\Sigma^{-1}A^T)^{-1}(Y-(A\mu+b))\right)
\end{aligned}$$

が成り立ちます。この式は、多変量正規分布 $N_n(A\mu + b, A\Sigma A^T)$ の確率密度関数です。
■

他に重要な事実として、多変量正規分布の周辺分布は正規分布であるというものがあります。