現代数学の基礎概念

梅崎直也

2020 年 6 月 1 日

1　平面のベクトル場とその微積分

ここではまず $\mathbb{R}^2$ やその開集合におけるベクトル場とその微積分について扱い、ベクトル解析の考え方の基本を学ぶ。

1.1　ベクトル場

回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

を考え、各点 (x, y) の移動を

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos t - y\sin t \\ x\sin t + y\cos t \end{pmatrix}$$

としよう。t を時間だと思うと、これは角速度一定な回転を表現している。この速度、つまり t について $t = 0$ での微分係数を計算すると

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

となるが、これはこの回転運動に関する各点での速度ベクトルを表すと考えられる。

このように平面上の各点に対してベクトルが定まっているものをベクトル場という。成分をとってしまえば、ベクトル場 $F(x, y)$ とは各点 (x, y) ごとにベクトル

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

が定まる関数であるといえる。

定義 1.1. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^r 級ベクトル場とは、関数 $F : U \to \mathbb{R}^2$ であって各成分 $F_1(x, y), F_2(x, y)$ が C^r 級関数であるもの。

以下このテキストではベクトル場を横ベクトルで表記する。

問題 1.2. 以下のベクトル場を図示してみよう。

1. $F(x, y) = (-y, x)$
2. $F(x, y) = (x, y)$
3. $F(x, y) = (y, x)$
4. a, b, c, d を定数として $F(x, y) = (ax + by, cx + dy)$

重要なベクトル場の例として次に定義する勾配ベクトル場がある。

定義 1.3 (勾配ベクトル場)**.** $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f に対して、その勾配ベクトル場を

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と定める。

逆にベクトル場 F に対してポテンシャル f とは $F = \operatorname{grad} f$ となる関数のことをいう。

問題 1.4. 次の関数 $f(x,y)$ に対し、その勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} f$ を計算せよ。

1. a, b 定数として $f(x,y) = ax + by$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $f(x,y) = x^2 - y^2$
4. $f(x,y) = x^2 - y$

解答.

1. $\operatorname{grad} f = (a, b)$
2. $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$
3. $\operatorname{grad} f = (2x, -2y)$
4. $\operatorname{grad} f = (2x, -1)$

問題 1.5.

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

とする。これに対して $\operatorname{grad} f$ を求めよ。

解答.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \times (-\frac{1}{2})(x^2 + y^2)^{-3/2} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}\end{aligned}$$

であり、$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ についても同様に計算することで

$$\operatorname{grad} f = -\frac{1}{x^2 + y^2}(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

となる。

勾配は f の方向微分全ての情報を持っている。つまり、v 方向の方向微分は $v \cdot \operatorname{grad}(f)$ である。このことから、$v = \operatorname{grad}(f)$ のとき、この内積が最大なので、これが f の最も増加する方向であることもわかる。また、v が $\operatorname{grad}(f)$ と直交する場合、f の v 方向への方向微分が 0 である、つまり v が f の等高面（の接ベクトル）を与え、$\operatorname{grad}(f)$ はこの面の法ベクトルである。

例 1.6. 平面流体の速度ポテンシャルと流れ関数

1.2 ベクトル場の微分

平面の領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義されたベクトル場 F に対して、div と rot という二種類の微分を定義する。まずは div について見ていこう。div は divergence の略で、日本語では発散と呼ばれる。

定義 1.7. F を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級ベクトル場とする。これに対し F の発散 $\mathrm{div}F$ を

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

で定義する。

典型的には次のようなベクトル場を考えよう。

例 1.8. ベクトル場 $F = (x, 0)$ に対し、

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$$

ベクトル場 $F = (y, 0)$ に対し、

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

ベクトル場 $F = (0, x)$ に対し、

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

ベクトル場 $F = (0, y)$ に対し、

$$\mathrm{div}F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$$

問題 1.9. 次のベクトル場に対し $\mathrm{div}F$ を計算せよ。ただし U は適切に選ぶものとする。

1. a, b を定数として $F = (a, b)$
2. $F = (x, y)$
3. a, b, c, d を定数として $F = (ax + by, cx + dy)$
4. $F = \mathrm{grad}\,\dfrac{1}{r}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$

解答.

1. $\mathrm{div}F = 0$
2. $\mathrm{div}F = 2$
3. $\mathrm{div}F = a + d$
4.

$$\begin{aligned}\mathrm{div}F &= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}^3 - 3x^2\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3} - \frac{\sqrt{x^2+y^2}^3 - 3y^2\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^3} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\end{aligned}$$

つぎに rot を定義する。rot は rotation の略で日本語では回転という。

定義 1.10. 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級ベクトル場に対し

$$\mathrm{rot}\,F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

と定める。

典型的には次のようなベクトル場を考えよう。

例 1.11. ベクトル場 $F=(x,0)$ に対し、

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

ベクトル場 $F=(y,0)$ に対し、

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -1$$

ベクトル場 $F=(0,x)$ に対し、

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

ベクトル場 $F=(0,y)$ に対し、

$$\operatorname{rot} F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

問題 1.12. 次のベクトル場に対し $\operatorname{rot} F$ を計算せよ。ただし U は適切に選ぶものとする。

1. a, b を定数として $F=(a,b)$
2. $F=(x,y)$
3. $F=(y,-x)$
4. a,b,c,d を定数として $F=(ax+by, cx+dy)$
5. $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$
6. $F = \operatorname{grad} \frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2+y^2}$

解答.
1. $\operatorname{rot} F = 0$
2. $\operatorname{rot} F = 0$
3. $\operatorname{rot} F = -2$
4. $\operatorname{rot} F = c-b$
5. $$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 0\end{aligned}$$
6. $$\operatorname{rot} F = 0$$

問題 1.13. $U \subset \mathbb{R}^2$ で定義された C^2 級関数に対し次が成立することを確かめよ。

1. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$
2. $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f$