大学数学入門無料公開講座「$\epsilon\delta$ 論法と中間値の定理」

梅崎直也@unaoya（株式会社すうがくぶんか）

2022 年 5 月 13 日

この講座では大学数学への入門として、$\epsilon\delta$ 論法や中間値の定理を通して論理的に数学を記述することについてお話しします。新しい現象を説明するのではなく、すでにお馴染みの実数、連続関数、極限、指数関数などについてより論理的に厳密に記述していきます。目標である中間値の定理は以下のようなものです。

定理 (中間値の定理)**.** 実数 a, b が $a < b$ であるとし、$f(x)$ を a, b を含む区間で定義された連続関数であるとする。$f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ であるとき、x 軸上の $a < c < b$ を満たす点 $x = c$ で $f(c) = 0$ となるものが存在する。

この定理を証明せよといわれても、当たり前にみえて何をすればいいのかわからないと感じる方も多いでしょう。連続関数とはグラフが切れ目ない曲線であることで、x 軸とは実数が切れ目なく並んでいる数直線であり、切れ目ないものと切れ目ないものが交わるのは直感的には当たり前と感じます。何を証明すればよいのかわからないのは、定義がはっきりしないことやそもそも数学の証明とは何をするものかがわからないことにあります。今回の講座では、実数や連続関数という概念を数学的な意味で厳密に定義し、その定義から論理的に上の定理を証明することを目指します。直感的な理解と厳密な論証は数学を学ぶ上で相補的であり、$\epsilon\delta$ 論法を通してその両面を学んでいきましょう。

数学における論理を表現するために重要な道具が量化子です。量化子とは「すべての x」や「x が存在する」という文を表現するためのもので、$\forall, \exists$ という記号が用いられます。この講座では、量化子を用いた論理を土台として、集合や写像により数学的対象を記述するということについても解説していきます。

$\epsilon\delta$ 論法をはじめとして、微積分では不等式が頻繁に出てきます。高校数学での不等式は、仮定と同じ形に変形する、平方完成する、有名な不等式と同じ形に帰着する、などで証明できるものが多いでしょう。しかし、微積分で現れる不等式を証明する際には、量化子付きの仮定からうまく不等式を作り出すなどの操作が必要なため、慣れないと難しいものです。今回の講座では、この点についても丁寧に説明します。

$\epsilon\delta$ 論法を用いて関数の連続性や極限を定義することの実用上の利点は、複数の変数の極限を同時に考える場合などに収束の様子を正確に表現できることにあります。例えば連続関数列の極限が連続となることや、連続関数が積分できることの十分条件として、一様収束や一様連続などの概念があり、これらは $\epsilon\delta$ 論法を用いることで通常の収束や連続性との違いが明確になります。今回の講座では一様収束や一様連続性については扱わないので、またの機会をお待ちください。

この資料単独でも読んでいただけるように丁寧に説明を書きました。実際の講座では内容の一部のみを解説することをご了承ください。

すうがくぶんかでは、微分積分や線形代数をはじめとして、さまざまな数学の講座を開講しています。ご興味ある方は弊社 web サイトより講座をご覧ください。私は 2022 年は確率論と線形代数と群の表現の講座を担当します。

2022 年 5 月 6 日に軽微な修正を行いました。

目次

1　論理と量化子

いわゆる大学数学が書かれる数学書はおおよそ、公理や定義から出発して論理によってさまざまな命題を証明していくというスタイルで書かれている。

命題とは、真偽が定まる文のことをいう。既に真であるとわかっている命題と論理を用いて命題が真であることを証明していく。

公理は理論の出発点となる命題で、真であると定めているもの。定義は数学的概念に名前を付けるもので、これも真であると定めている。つまり、定義や公理から論理と既に真であるとわかっている命題を用いて新たな命題を証明していく。

証明すべき命題たちは、重要度や位置付けによって、定理、補題、系、命題などと呼ばれる。ここで「命題」は二重の意味を持つことに注意しよう。重要なものが定理、それほど重要でないものが命題、系は定理などからすぐにわかるもの、補題は定理などを証明するための準備である。呼び分けは気持ちの問題なので、同じ内容の命題が教科書によって定理だったり命題だったり系だったりする。

命題を証明していく過程では、何を真として使ってよくて何を使ってはいけないかを明確にすることがポイントになる。既に当たり前のように使っている事実も一旦知らないつもりで証明し直すという態度が必要になる。

今回の講座では量化子入りの定理や定義、仮定の使い方に慣れることを一つの目標とする。変数がたくさん出てくるとき、変数を整理し、また変数のスコープを意識することが大事になる。同じ文字を使っていても異なるものを示すことも多いし、束縛変数の文字はその外では意味を持たない。特に、ある命題を証明する際に、既に証明した命題を用いるときに文字が衝突するので注意が必要になる。

証明の考え方として重要なことは、まず結論が何であるか、その結論を示すためには何をいえばよいかを考えるのがよい。仮定は後でみる方がうまくいくことが多い。定義は基本的には文の言い換えで、証明したい命題に現れる言葉を定義を用いてより基本的な言葉に書き直していくというのが基本戦略。

証明をゲーム的に捉えると、結論が真であることを言えれば勝ち。仮定は道具や武器のイメージで、公理、定義やこれまで示した命題と共に用いて結論を導く。このとき、サブゴールをうまく設定することが重要になる。つまり、結論の一歩手前となるような命題を設定することができると証明が見つけやすい。証明をグラフ的に捉えれば、最後まで道が通れば勝ち。教科書などに書かれた証明の文章は一直線的だが、実のところそうではない。

1.1　量化子

論理は述語論理と呼ばれるものを用いる。変数 x を持つ文で x の値を決めるごとに命題となるものを、条件とか述語とかいう。例えば x が実数を動く変数とし、「$x > 0$」とか「$x + 1 = 2$」とかが変数 x を持つ条件で、x の値を決めると命題になる。例えば「$1 > 0$」や「$-1 > 0$」」あるいは「$1 + 1 = 2$」や「$2 + 1 = 2$」などは命題である。$1, 0, -1, 2$ などは別に定義が与えられており、これを用いて上の命題の真偽を証明する。

条件 $P(x)$ から命題「すべての x に対して $P(x)$」や「$P(x)$ をみたす x が存在する。」を作ることができる。これは真偽が決まる文になり、x は「すべての」や「存在する」例えば「任意の x に対して $x > 0$」という命題と「任意の y に対して $y > 0$」という命題は同じものであると考える。

「すべての」と「存在する」をそれぞれ量化子と呼ばれる記号 $\forall, \exists$ で表す。条件 $P(x)$ に対し $\forall x P(x), \exists x P(x)$

として、量化子を用いて変数 x を束縛し、命題を作る。例えば変数 x が実数全体を動くとき、「$\forall x(x>0)$」であれば、これは偽である。$\forall xP(x), \exists xP(x)$ における x は束縛変数と呼ばれるもので、常に量化子とセットにして扱う。

論理記号 $\forall$ を用いて $\forall xP(x)$ と表される命題を全称命題といい、「全ての x に対して $P(x)$」とか「任意の x に対して $P(x)$」などと書く。x の動く範囲を集合 X としたとき、$\forall x \in X(P(x))$ などとも表す。「全ての $x \in X$ に対して $P(x)$」とか「任意の $x \in X$ に対して $P(x)$」などと書く。これは $x \in X$ ならば $P(x)$ というのと同じこと。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表す。例えば「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」は偽な命題であり、「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」は真な命題である。

論理記号 $\exists$ を用いて $\exists xQ(x)$ と表される命題を存在命題といい、「$Q(x)$ となる x が存在する」とか「ある x に対して $Q(x)$」などと書く。集合 X の要素に条件を満たすものが存在するというときには、$\exists x \in X(Q(x))$ などとも表す。「$Q(x)$ となる $x \in X$ が存在する」とか「ある $x \in X$ に対して $Q(x)$」などと書く。あるいは「ある $x \in X$ が存在して $Q(x)$」と書かれることもある。例えば「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」は真な命題であり、「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2 < 0)$」は偽な命題である。

量化子と「かつ」、「または」は似ている。「全ての x について $P(x)$」というのは「$P(0)$ かつ $P(1)$ かつ $\cdots$」というようなもの。「$P(x)$ となる x が存在する」というのは「$P(0)$ または $P(1)$ または $\cdots$」というようなもの。

1.1.1 量化子の否定

量化子の否定について説明する。「全ての x に対して $P(x)$」の否定は「$P(x)$ でない x が存在する」であり、論理式で書くと $\forall xP(X)$ の否定は $\exists x \neg P(x)$ であり、否定を取ることで $\forall$ と $\exists$ が入れ替わるのは、ドモルガンで「かつ」と「または」が入れ替わったことと似ている。

例えば「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」の否定は「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」であり、逆に「$\exists x \in \mathbb{R}(x \leq 0)$」の否定は「$\forall x \in \mathbb{R}(x>0)$」である。「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」の否定は「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2 < 0)$」であり、逆に「$\exists x \in \mathbb{R}(x^2 < 0)$」の否定は「$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0$」である。

1.1.2 複数の量化子が現れる場合

複数の量化子がつく場合、量化子の順番が重要になる。$P(x,y)$ を二変数 x,y についての条件とする。これに対し $\forall x \exists y P(x,y)$ と $\exists y \forall x P(x,y)$ は異なる命題である。

例えば $x,y \in R$ として、$P(x,y)$ を「$x<y$」としよう。

「どんな x に対しても $P(x,y)$ をみたす y が存在する」というと、二通りの解釈が存在する。「「どんな x に対しても $P(x,y)$ をみたす」という性質を持つ y が存在する」なのか、「どんな x に対しても「その x に対しては $P(x,y)$ をみたす y がが存在する」」なのか。

1.1.3 ならば

二種類のならばの違いについて説明する。$P(x)$ ならば $Q(x)$ といったときと、P ならば Q といったときの違いに注意する。論理式でいうと $P \to Q$ と $P(x) \Rightarrow Q(x)$ を区別する。後者は任意量化が隠れていて、「任意の x に対して $P(x)$ ならば $Q(x)$ である」ということであり、これは「任意の $P(x)$ を満たす x に対して $Q(x)$ である」ということでもある。論理式で書くと $\forall x(P(x) \to Q(x))$ のことである。

日常用語でならばを使うのは後者であることが多いように思う。これの否定は、「$P(x)$ でありかつ $Q(x)$ でない x が存在する」または「ある x に対して $P(x)$ でありかつ $Q(x)$ でない」などと書かれる命題で、論理式