

第1回 関数のグラフと微分

1.1 関数とそのグラフ

1.1.1 関数

1つ値を代入すると1つ値が返って来るような関係を**関数**と言います。例えば、

$$f(x) = -x^3 + 2x - 1$$

は関数です。例えば、 $x = 1$ を代入すると、関数の値 $f(1)$ は

$$\begin{aligned} f(1) &= -1^3 + 2 \times 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

と評価することができます。関数は、身近な現象を理解するとき、大きく役立つことがあります。例えば、次のようなことが記述できたら面白いと思いませんか？

例：ある地域では、コンビニ1店舗あたりの商圈を x [km]と決めてコンビニを設置したとき、店舗全体で1ヶ月あたり

$$f(x) = -x^3 + 2x - 1$$

[千円]の利益が見込めることがわかっています。

1.1.2 関数のグラフ

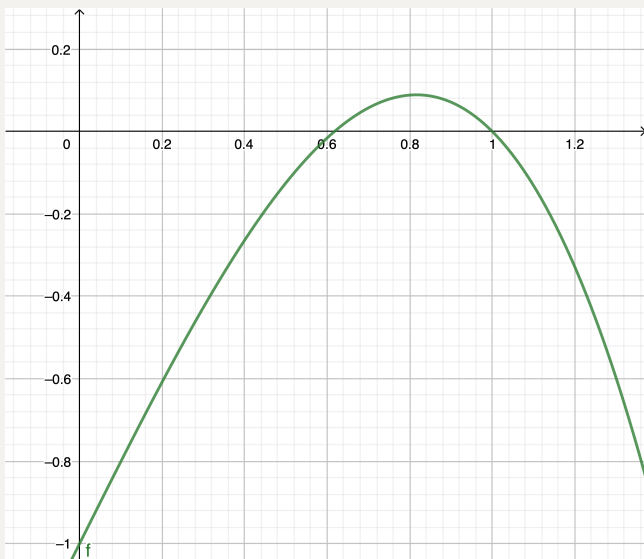
さて、関数 $f(x)$ が手元にあったとして、以下のような問題を考えてみましょう。

問題： x に代入する値に応じて関数 $f(x)$ の値がどのように変化するか？

1.1.1節の例で言えば、商圈 x [km]に応じて利益 $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ がどう変化するか観察することに対応しています。（興味深い問題だとは思いませんか？）

ここで注意してほしいことは、関数 $f(x)$ の式を知っていても、この問題に答えることが簡単とは限らないことです。実際、関数 $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ に $0 < x < 1$ の範囲にある値を代入した時の最大値は何かと問われて、パッと答えられる人はいるでしょうか。

では、この問題を解決する方法はなんでしょうか。一つの回答は、**関数のグラフ**を書くことです。例えば、関数 $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ に対して、横軸に x の値・縦軸に関数 $f(x)$ の値をとったグラフ $y = f(x)$ を書くと次のようになります。



関数の式だけではパツとは思いつかないような様々な情報が、グラフからは見て取れるのではないのでしょうか。例えば、

- 関数の値が正の値になる範囲はおよそ $0.6 < x < 1$ であること。（実際に計算すると、 $(\sqrt{5} - 1)/2 < x < 1$ の範囲で関数の値が正になるとわかります。 $(\sqrt{5} - 1)/2 \sim 0.618$ です。）
- 関数の値が $0 < x < 1$ の範囲で最大になるのは、およそ $x = 0.8$ あたりであること。（実際に計算すると、 $x = \sqrt{2/3} \sim 0.816$ で最大値を取るとわかります。）

などです。

1.1.3 グラフの概形を書くために必要なもの

1.1.2節の議論から、手元にある関数 $f(x)$ を理解する上では、その関数の式の形だけでなく、その関数のグラフ $y = f(x)$ を書くことが大きく役に立つことを納得してもらえたのではないのでしょうか。

もしそうであれば、私たちは関数のグラフ（正確でなくてもその概形）書くためには何を準備できると嬉しいか知りたくなってくるでしょう。要するに次の問題を考えていきたいわけです。

問題：手元の関数 $f(x)$ に対して、そのグラフ $y = f(x)$ の概形を書くとき、どのような情報があれば役に立つのでしょうか？

解答は1.1.3節の最後に述べることにします。最初は、ひとまず難しくない問題を実際に解いてみて、なぜ解けるのか理由を反省してみましょう。実はこのような問題は、高校数学IA, IIBでも何度か登場したことがあります。最たる例は1次関数です。

1次関数

1次式 $ax + b$ で定義されるような関数 $f(x) = ax + b$ を1次関数と言います。1次関数は、その定義から

- $x = 0$ を代入すると、関数の値は $f(0) = b$ と評価できる。
- x の値を1だけ増やすと、関数の値が a だけ増える。

と言った性質を確認することができます。例えば、 $f(x) = 2x + 1$ という1次関数は $x = 0$ のとき $f(0) = 1$ で、 x が1だけ増えるごとに関数の値が2だけ増える（ $x = 1$ なら $f(1) = 3$, $x = 2$ なら $f(2) = 5$ と言った具合に）ような関数です。

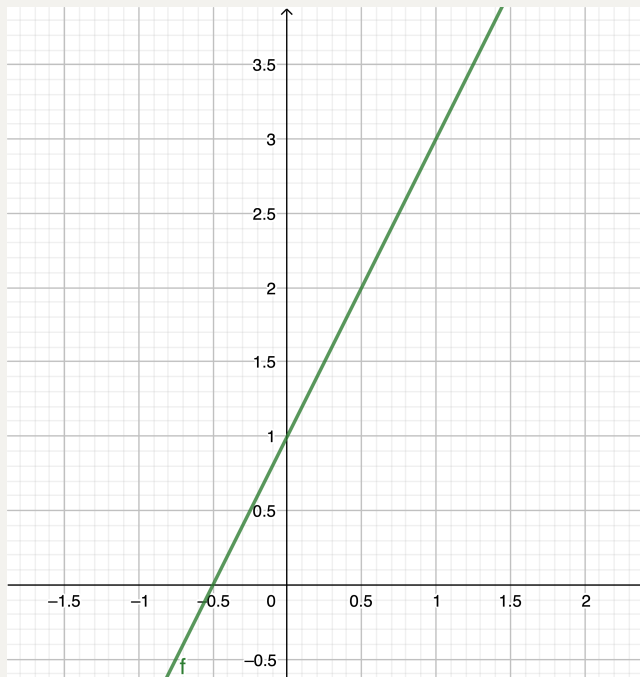
ところで、1次関数はその式の形から直接グラフの概形が書ける関数だと言うことに気付くでしょうか。以下の問題を解いてみてください。

問題：関数 $f(x) = 2x + 1$ のグラフを、横軸を x の値・縦軸を関数 $f(x)$ の値にとって書いてみてください。

解答：関数 $f(x) = 2x + 1$ は以下の性質を持ちます。

- $x = 0$ を代入すると、関数の値は $f(0) = 1$ と評価できる。
- x の値を1だけ増やすと、関数の値が2だけ増える。

この情報から、ひとまず $x = 0$ のときに縦軸の高さを $y = 1$ にとっておき、 x の値が1増えるごとに高さが2だけ増えるように右肩上がりの直線を書けば良いことがわかります。この結果、



のようなグラフが得られるわけです。■

さて、1次関数のグラフが式 $f(x) = ax + b$ から直接書ける理由を反省しておきましょう。それは、グラフの傾きが一定で、特に係数 a の大きさが傾きの大きさの表現になっているからではないでしょうか。実際、

- 係数 a が正の数ならば、グラフは右上（増加方向）に向かって伸びる。
- 係数 $a = 0$ ならば、グラフは横軸に平行になる。
- 係数 a が負の数ならば、グラフは右下（減少方向）に向かって伸びる。

ことがわかるでしょう。要するにグラフの傾きを知ることが、グラフの概形を知る上でとても大切な情報の一つだと言うことがわかったわけです。

増減表

1次関数を復習する中で、関数のグラフの概形を書くにあたって、グラフの傾きを知ることが重要だと言う知見を得ました。では、仮に次のような表が与えられれば、その関数のグラフを書くことができるのかを考えてみましょう。

x	...	-1	...	1	...
傾き	正	0	負	0	正
$f(x)$	...	4	...	2	...

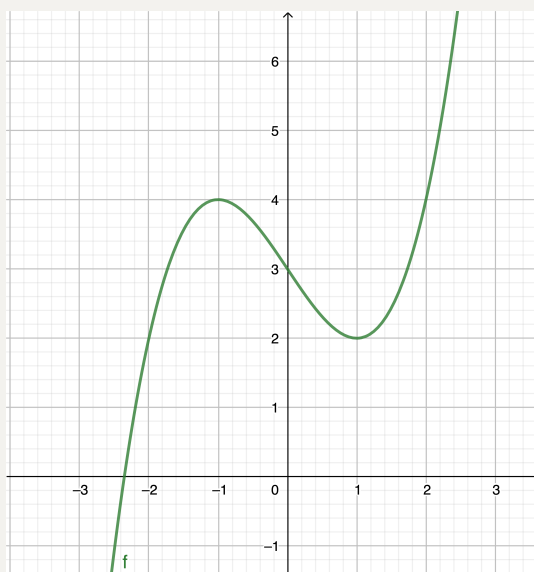
このように x の値・傾き・関数の値 $f(x)$ の3つをセットにして記述した表は増減表と呼ばれます。

問題：上の増減表に基づいて、横軸を x の値・縦軸を関数 $f(x)$ の値にとったグラフ $y = f(x)$ を書いてみましょう。

解答：表からは

- $x < -1$ では右上（増加方向）に、 $-1 < x < 1$ では右下（減少方向）に、 $x > 1$ では右上（増加方向）に向かってグラフが伸びる。
- $x = -1, 1$ での傾きは 0 である。
- $f(-1) = 4, f(1) = 2$ という値をとる。

ことが読めます。これから例えば、



のようなグラフの概形を描くことができるでしょう。■

さて、1.1.3節の冒頭で述べた問題

問題（再掲）：手元の関数 $f(x)$ に対して、そのグラフ $y = f(x)$ の概形を書くとき、どのような情報があれば役に立つのでしょうか？

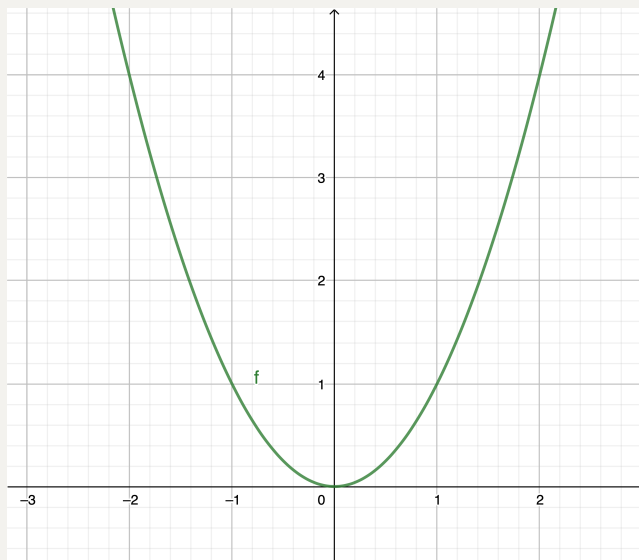
に立ち返りましょう。この問題には様々な解答が考えられますが、今回焦点を当てていきたいのはグラフの傾きです。グラフの概形は、そのグラフの傾きがわかればある程度わかるのです。

1.2 微分係数と導関数の導入

1.1節では、グラフの概形を書くためには、グラフの傾きを知ることが便利だということを確認しました。要するに、関数 $f(x)$ が与えられたとき、この関数の式から x の各値でのグラフの傾きを計算できるような方法を考えれば、関数のグラフ $y = f(x)$ の概形を書けるようになるわけです。そして、この方法こそが**微分**なのです。

1.2.1 微分係数と導関数のイメージ

厳密な定義は後日に回して、ここでは微分にまつわる術語を手短に紹介していきます。関数 $f(x)$ のグラフ $y = f(x)$ の $x = a$ での傾きを、 $x = a$ での**微分係数**と言います。例えば、関数 $f(x) = x^2$ のグラフ $y = x^2$ は $x = 0$ で傾き 0 になっています。



これは「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 0$ での微分係数は 0 である」と表現されるわけです。また、関数 $f(x)$ に対して

$$f'(a) = \text{「関数 } f(x) \text{ の } x = a \text{ での微分係数」}$$

になるような関数 $f'(x)$ を求めることができたとき、この関数 $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の**導関数**と言います。

1.2.2 単項式関数での例

多項式で定義される関数を**単項式関数**と言います。 c を実数、 d を正の整数として、

$$f(x) = cx^d$$

と書けるものです。例えば、1次関数 $f(x) = cx$ や2次関数 $f(x) = cx^2$ は単項式関数でもあります。ここでは、単項式関数の導関数を証明なしに紹介します。（証明は後日与えるので安心してください。）紹介した事実を用いて問題を解いてみることで、微分係数や導関数と言った言葉に慣れていきましょう。

定理： n を正の整数とします。関数 $f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = nx^{n-1}$ になることが知られています。

問題：上の定理を用いて、次の問いに答えてください。

(1) 関数 $f(x) = x$ の導関数がなにか、導関数の定義から想定してみてください。また、実際に定理を用いて計算することで、想定が正しいか確認してください。

(2) 関数 $f(x) = x^2$ の導関数、 $x = 1$ での微分係数を求めてください。

(3) 関数 $f(x) = x^3$ の導関数、 $x = 1$ での微分係数を求めてください。

解答：

(1) 関数 $f(x) = x$ は x の値によらず傾き 1 のグラフを持ちます。導関数の定義から $f'(x) = 1$ だろうことがわかります。実際に計算すると、 $n = 1$ の場合なので $f'(x) = 1x^{1-1} = 1$ と計算でき、想定していた結果が得られます。ここで、 $x^0 = 1$ を用いました。

(2) 定理では $n = 2$ の場合です。 $f'(x) = 2x$ となります。導関数 $f'(x) = 2x$ に $x = 1$ を代入すれば、 $x = 1$ での微分係数を求めることができます。 $f'(1) = 2$ です。

(3) 定理では $n = 3$ の場合です。 $f'(x) = 3x^2$ となります。導関数 $f'(x) = 3x^2$ に $x = 1$ を代入すれば、 $x = 1$ での微分係数を求めることができます。 $f'(1) = 3$ です。

1.2.3 導関数と増減表の関係

さて、導関数が分かれば増減表が分かる、要するにその関数のグラフの概形が書けることを確認していきましょう。次の問題を解いてみてください。

問題：関数 $f(x) = x^5$ について次の問いに答えてください。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めてください。

(2) 以下の増減表について、 (a) , (b) に入る値を求め、 $(ア)$, $(イ)$ に該当する言葉を「正・負」のいずれかから選んでください。

x	...	(a)	...
傾き	$(ア)$	0	$(イ)$
$f(x)$	...	(b)	...

(3) (2) で求めた増減表を元に関数 $f(x) = x^5$ のグラフの概形を書いてください。

解答：

(1) 1.2.2節で紹介した定理の $n = 5$ の場合です。 $f'(x) = 5x^4$ とわかります。

(2) (a) の値から求めます。この値は、グラフの傾きが 0 になる x の値、要するに方程式 $f'(x) = 0$ の解を求めれば得られることがわかります。(1) の結果から $5x^4 = 0$ を解けば良いわけですが、この解は $x = 0$ です。 $(a) = 0$ とわかりました。次に、 (b) の値を求めましょう。 $(a) = 0$ なので、 $(b) = f(0) = 0^5 = 0$ です。最後に $(ア)$, $(イ)$ に該当する言葉を選択します。 $t^4 \geq 0$ という事実注意到すれば、 $(ア)$ も $(イ)$ も「正」が入ることがわかります。

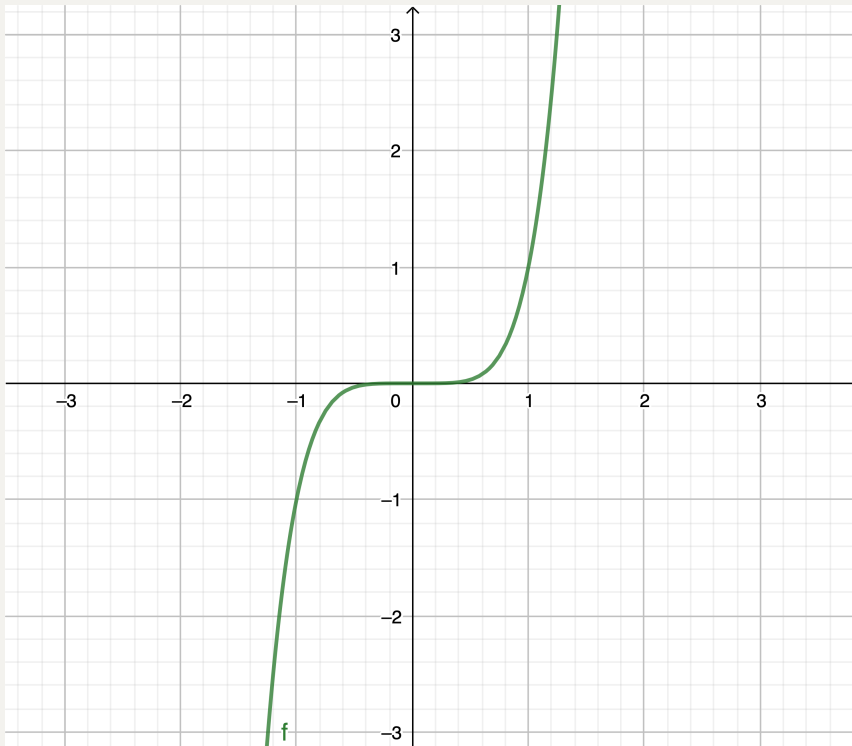
(3) (2) から関数 $f(x) = x^5$ の増減表として、次の表が得られます。

x	...	0	...
傾き	正	0	正
$f(x)$	...	0	...

これから、

- グラフは右上（増加方向）に伸びていく。
- $x = 0$ での傾きは 0 である。
- $f(0) = 0$

であることが見て取れるので、



というグラフの概形が得られます。■

1.3 今後の展望

今回は、関数のグラフを書くという題材から、微分という概念を導入する動機について説明しました。積み残した課題を以下に整理しておきます。

- 導関数の便利な性質を紹介する。
- 他の様々な関数の導関数を紹介する。
- 微分係数や導関数の定義を厳密に導入し理解する。

次回は、この課題のうち「導関数の便利な性質の紹介」をいくつか行っていきたいと思います。