大人のための高校数学 1A

梅崎直也

2021 年 3 月 12 日

目次

第 1 章

場合の数と確率

1.1　場合の数

ここでは、ある条件を満たすものが全部で何通りあるかを数える、というタイプの問題を考える。全て書き出すのが基本だが、その時に行き当たりばったりにやるのではなく、適切な表や図を書いて整理しながら数えるとよい。また、そのような表や図についての観察を元に、いくつかの典型的な計算方法を学んでいこう。

問題 1.1.1. 500 円、100 円、10 円の 3 種類の硬貨が十分たくさんある。この 3 種類の硬貨を用いて 1200 円ちょうどを支払う方法は何通りあるか求めよ。ただし使わない硬貨があってもよい。

解答. 500 円玉、100 円玉が多い順に数えていく。それぞれの枚数が

$$
\begin{aligned}
&(2,2,0),(2,1,10),(2,0,20),\\
&(1,7,0),(1,6,10),(1,5,20),(1,4,30),(1,3,40),(1,2,50),(1,1,60),(1,0,70),\\
&(0,12,0),(0,11,10),(0,10,20),(0,9,30),(0,8,40),(0,7,50),(0,6,60),\\
&(0,5,70),(0,4,80),(0,3,90),(0,2,100),(0,1,110),(0,0,120)
\end{aligned}
$$

の 24 通り

問題 1.1.2. 大小 2 個のサイコロを投げる。このとき、

1. 目の和が奇数になるのは何通りか。
2. 目の積が奇数になるのは何通りか。
3. 目の積が 4 の倍数になるのは何通りか。

解答. サイコロの出る目は 36 通りある。これを表にして、上の条件に当てはまる場合の数を数えよう。

1. 和が $3,5,7,9,11$ のいずれかで、それぞれ数えると $2+4+6+4+2=18$ 通りである。

2. 積が $1, 3, 5, 9, 15, 25$ のいずれかで、$1+2+2+1+2+1 = 9$ 通りである。あるいは、奇数同士の積のみ奇数になることに注意して、大が 3 通り小が 3 通りの組み合わせだから 3×3 9 通りである。
3. 目の積が $4, 8, 12, 16, 20, 24, 36$ のいずれかで $3+2+4+1+2+2+1 = 15$ 通りである。あるいは、両方偶数の 9 通りと、4 と奇数の組み合わせ 6 通りで合わせて $6+9 = 15$ 通り。

問題 1.1.3. a, b, c, d, e の 5 文字から 3 文字を選んで並べる方法は何通りか。またこの 5 文字のうち 3 文字を選ぶ方法（順番は気にしない）は何通りか。

解答. まず並べ方を樹形図を書いて考える。5 文字から 3 文字を選んで並べる方法は $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通りである。

次に並べ方は考えずに選ぶ方法は、並べ方と選び方の関係が 1 組の選び方から 6 通りの並べ方が決まることを考えると、$60 \div 6 = 10$ 通りと計算できる。

問題 1.1.4. 1 から 9999 までの数のうち、0 という文字をちょうど 2 個含むものは何個あるか。

解答. 2 桁以下にはありえない。3 桁なら $100, 200, \ldots, 900$ の 9 通りである。4 桁なら、まず 0 を置く場所が下 3 桁のうち 2 つを選ぶので 3 通りあり、それぞれに対して残り 2 桁の数字が $9 \times 9 = 81$ 通りなので $81 \times 3 = 243$ 個。これらを合わせて全部で 252 個。

問題 1.1.5. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ の 6 個の数字から異なる 4 個の数字を使って 4 桁の整数を作るとき、以下のものは何個できるか。

1. 整数
2. 3 の倍数

解答.

1. 樹形図を書いて考える。まず千の位は 0 以外の 5 通りあり、それ以下の位は順に $5, 4, 3$ 通りあるので、全体として $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ 個できる。
2. 3 の倍数であるためには、各位の数の和が 3 の倍数になればよい。したがって、数の組み合わせとしては $(0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 5), (0, 2, 3, 4), (0, 3, 4, 5)$ の 4 種類。それぞれから 4 桁の整数を作るには $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ 通りなので、72 個

問題 1.1.6. 4 種類の数字 $1, 2, 3, 4$ を用いて 3 桁の正の整数はいくつ作れるか。ただし同じ数字を繰り返し使ってもよい。

解答. 各位の選び方が 4 通りずつなので、$4^3 = 64$ 個

1.1.1　順列と組み合わせ

問題 1.1.7. A, B, C, D, E, F の文字が書かれたカードがそれぞれ 1 まいずつ全部で 6 枚ある。これから何枚か選んで一列に並べる。

1. 3 文字使った文字列は何通りか
2. 6 文字全て使った文字列は何通りか

解答.

1. 樹形図で考えると、最初の 1 文字が 6 通り、2 文字目が 5 通り、3 文字目が 4 通りなので $6 \times 5 \times 4 = 120$ 通りとなる。
2. 同様に樹形図で考えて $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ 通りである。

このように、異なる n このものから k 個選んで一列に並べる方法は

$$n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1)$$

と計算できる。

定義 1.1.8 (階乗)**.** 正の整数 n に対し n の階乗 $n!$ を

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

で定義する。また $0! = 1$ と定義する。

問題 1.1.9. 以下の値を求めよ

1. $5!$
2. $6!$
3. $7!$

解答.

1. 120
2. 720
3. 5040

階乗は

$$n! = n \times (n-1)!$$

という性質を持つ。逆にこの式を用いて $n!$ を定義することもできる。これを階乗の再帰的定義という。

階乗を用いて順列の総数を表すと、n 個の異なるものから k 個選んで一列に並べる方法は

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1) &= \frac{n \times (n-1) \times \cdots (n-k+1) \times (n-k) \times (n-k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times 2 \times 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

と表すこともできる。この割り算は次のように理解できる。まず n 個のものを一列に並べる方法が $n!$ 通り。そのうち左から k 個に注目することで、n 個のものから k 個選んで一列に並べることができる。ただし、この k 個の並びが全く一致するものが、右から $n-k$ 個分の並べ方の分だけ重複する。この重複の分を無視するために $(n-k)!$ で割ることによって $n-k$ 個の並べ方を求めることができる。

問題 1.1.10. 男子 2 人と女子 2 人が 1 列に並ぶとき、次の並び方は何通りあるか。

1. 並べる総数
2. 女子 2 人が隣り合うという条件をみたす並びかた
3. 女子 2 人が両端という条件をみたす並びかた
4. 女子 2 人が隣り合わないという条件をみたす並びかた

解答.
1. $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通り
2. まず女子二人を一人とみなして三人を一列に並べ、最後に女子二人の左右を決める。$3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$ 通り
3. 両端の女子の並び方が 2 通り、男子の並び方が 2 通り、これらの組み合わせで $2 \times 2 = 4$ 通り
4. 総数から隣りあう並び方を除けばよい。$24 - 12 = 12$ 通り

問題 1.1.11. a, a, b, c の 4 文字を一列に並べる並べ方。ただし二つの a は区別しない。(例えば a, a, b の 3 文字であれば aab, aba, baa の三通り)

解答. 二つの a を仮に区別して a_1, a_2 とし 4 文字を一列に並べると $4! = 24$ 通り。この 24 通りで a_1, a_2 の区別を忘れると 2 通りずつ重複が生まれる。例えば a_1a_2bc と a_2a_1bc はどちらも同じ。この重複を考慮して $4 \times 3 \times 2 \div 2 = 12$ 通りとなる。

問題 1.1.12. a, b, c, d を一列に並べる

1. a, b が隣り合う並べ方。
2. a が c より右にある並べ方

解答.
1. a, b をひとまとまりにして、3 文字を並べる方法が $3! = 6$ 通り。それぞれについて、a, b の左右が 2 通りあるから $2 \times 6 = 12$ 通りとなる。
2. 全ての並べ方について、a, c の入れ替えでうつり合う並べ方が 2 つずつ組みになる。例えば $abcd$ と $cbad$ とか $acbd$ と $cabd$ など。これを考慮して、全体を半分にすればよく、$4! \div 2 = 12$ 通りとなる。

問題 1.1.13. 5 人から 3 人選ぶ選び方は何通りか。

解答. 5 人から 3 人選んで並べる方法が $5 \times 4 \times 3$ 通りであった。ここでは選ぶだけなので、並べ

方は気にしない。同じ 3 人を選んだ時に並べ方の区別は $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種類あるから、これの区別を忘れるために 6 でわる。つまり選び方は $5 \times 4 \times 3 \div (3 \times 2 \times 1) = 10$ 通り

上のような計算を表す記号として二項係数を導入する。

定義 1.1.14. 自然数 n と自然数 $k \leq n$ に対し

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} $$

と定義し、これを**二項係数**と呼ぶ。二項係数は $\binom{n}{k}$ とも表す。

問題 1.1.15. 以下の値を求めよ

1. ${}_6C_3$
2. ${}_8C_5$
3. ${}_{80}C_{78}$

解答.

1. ${}_6C_3 = \dfrac{6!}{3!3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$
2. ${}_8C_5 = \dfrac{8!}{5!3!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 56$
3. ${}_{80}C_{78} = \dfrac{80!}{78!2!} = \dfrac{80 \times 79 \times \cdots \times 3}{78 \times 77 \times \cdots 1} = 3160$

問題 1.1.16. 男子 4 人、女子 5 人から何人かを選ぶ。以下の場合に何通りの選び方があるか求めよ。

1. 性別関係なく 3 人
2. 男子 2 人、女子 3 人
3. 男子 1 人、女子 2 人を選んで 1 列に並べる方法

解答.

1. 9 人から 3 人を選ぶので ${}_9C_3 = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$ 通り
2. 男子を 4 人から 2 人選ぶのが ${}_4C_2$ 通り、女子を 5 人から 3 人選ぶのが ${}_5C_3$ 通り、これの組み合わせで ${}_4C_2 \times {}_5C_3 = \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \dfrac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 40$ 通り
3. 男子の選び方が 4 通り、女子の選び方が ${}_5C_2$ 通り、3 人選んでから並べる方法が 3! 通りで、これらの組み合わせで $4 \times \dfrac{5 \times 4}{2 \times 1} \times (3 \times 2 \times 1) = 240$ 通り

問題 1.1.17. 6 人の人を以下のように組分けする方法は何通りか求めよ。

1. 3 人ずつ A, B の 2 つの組に分ける
2. 3 人ずつ 2 つの組に分ける
3. 2 人ずつ A, B, C の 3 つの組に分ける
4. 2 人ずつ 3 つの組に分ける

解答.

1. A 組の人を選べばよく、その選び方は ${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 通り

2. 上の方法で A, B の区別を忘れるため $20 \div 2 = 10$ 通り
3. A 組の人を選んだ後、B 組の人を選ぶことにして数えると ${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \dfrac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \dfrac{4 \times 3}{2 \times 1} = 90$ 通り
4. 上の方法で、A, B, C の区別を忘れるため $90 \div 6 = 15$ 通り

1.1.2　重複順列

同じ種類のものが複数ある場合に一列に並べる方法が何通りあるかを考える。一列に並べる場所を用意して、それぞれのものをどこに置くか決める、という方法で並び方を数える。このとき、同じ種類のものについて置き場所を選ぶためには結局置き場所の組み合わせを考えることになる。

例 1.1.18. 赤いボール 2 個と黒いボール 2 個を一列に並べる方法は何通りあるか考えよう。赤いボール 2 個と黒いボール 2 個はそれぞれ区別しないものとする。

このとき 4 つのボールの並べ方は、色の塗られていない 4 つのボールを並べて、このうち 2 つを選んでそれを赤く塗るのと同じこと。つまり、4 つのうち 2 つを選ぶことが、並べ方と同じだけある。したがって、求める場合の数は

$${}_4C_2 = 6$$

である。

問題 1.1.19. 以下の n, m に対し黒いボール n 個と白いボール m 個を一列に並べる方法は何通りか。

1. $n = 5, m = 3$
2. $n = 3, m = 4$

解答. 1. 白いボールを置く場所を 8 箇所のうち 3 箇所選べばよいので ${}_8C_3 = 56$ 通り
2. 黒いボールを置く場所を 7 箇所のうち 3 箇所選べばよいので ${}_7C_3 = 35$ 通り

問題 1.1.20. 黒いボールと白いボールと赤いボールを一列に並べる並べ方を考えよう。

1. 黒いボール 5 個、白いボール 1 個、赤いボール 1 個を一列に並べる並べ方は何通りか。
2. 黒いボール 5 個、白いボール 3 個、赤いボール 2 個を一列に並べる並べ方は何通りか。

解答. 1. 黒いボールの置き場所を選んだ後に白いボールの置き場所を選ぶと ${}_7C_5 \times {}_2C_1 = 42$ 通り
2. 黒いボールの置き場所を選んだ後に白いボールの置き場所を選ぶと ${}_{10}C_5 \times {}_5C_3 = 2520$ 通り

前の問題でやったように、一度仮に区別をつけておいて並べた後に区別を忘れるという方法でも計算できる。例えば黒いボール 5 個、白いボール 1 個、赤いボール 1 個を一列に並べるには、黒い

ボールを仮に全て区別すると 7! 通りの並べ方があり、ここから黒いボールの区別の仕方 5! 通りを忘れるので $\dfrac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$ 通りと計算できる。

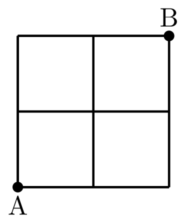
同じように黒いボール 5 個、白いボール 3 個、赤いボール 2 個を一列に並べる並べ方を計算すると、仮に区別したときの並べ方が 10! 通り、黒いボールの区別が 5! 通り、白いボールの区別が 3! 通り、赤いボールの区別が 2! 通りだから、$\dfrac{10!}{5!3!2!}$ と計算できる。つまり、

$$ {}_{10}C_5 \times {}_5C_3 = \frac{10!}{5!3!2!} $$

という式を証明したことになる。

この考え方を応用して、道順を数えるという問題を考えよう。

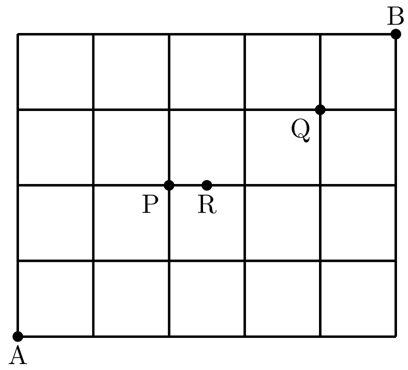
例 1.1.21. 図のように道路がある。点 A から点 B に最短距離で行く道順は何通りあるか。



A から上と右に 2 回ずつ進むことが最短で B にいく道順に対応する。したがって、上の問題と同様にして ${}_4C_2$ 通り。

問題 1.1.22. 図のように道路がある。以下のように点 A から点 B に最短距離で行く道順は何通りか

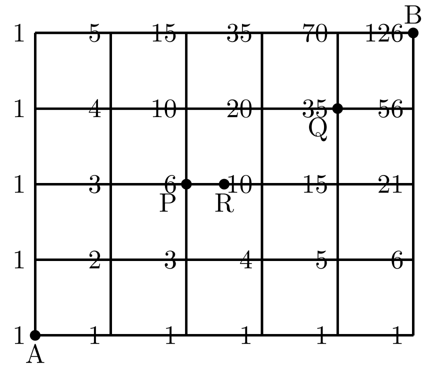
1. 全部の道順
2. 点 P を通る
3. 点 P と点 Q を通る
4. 点 R を通らない
5. 点 P も点 Q も通らない



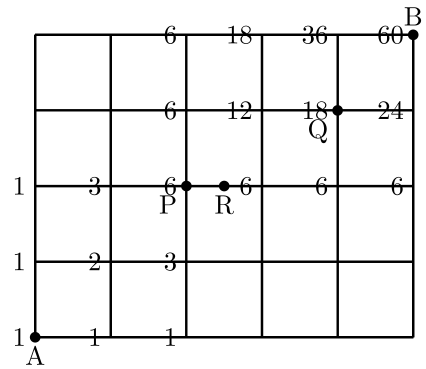
解答. 1. 上に 4 回進み右に 5 回進むと A から B み最短で移動できる。上を 4 個右を 5 個一列に並べる方法は ${}_9C_4 = 126$ 通り

2. A から P までは上に 2 回右に 2 回なので ${}_4C_2$ 通り、P から B までは上に 2 回右に 3 回なので ${}_5C_2$ 通り、これの組み合わせで ${}_4C_2 \times {}_5C_2 = 60$ 通り
3. A から P までは上に 2 回右に 2 回なので ${}_4C_2$ 通り、P から Q までは上に 1 回右に 2 回なので ${}_3C_1$ 通り、Q から B までは上に 1 回右に 1 回なので ${}_2C_1$ 通り、これらの組み合わせで ${}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = 36$ 通り
4. R を通るものを全体から引けばよいので $126 - {}_4C_2 \times {}_4C_2 = 90$ 通り
5. 全体から P を通るものと Q を通るものを引けばよい。ここで、P と Q の両方を通るものを二重に引いてしまうことに注意しよう。Q を通るものは ${}_7C_3 \times {}_2C_1 = 70$ 通りなので、P も Q も通らないものは $126 - 60 - 70 + 36 = 32$ 通り

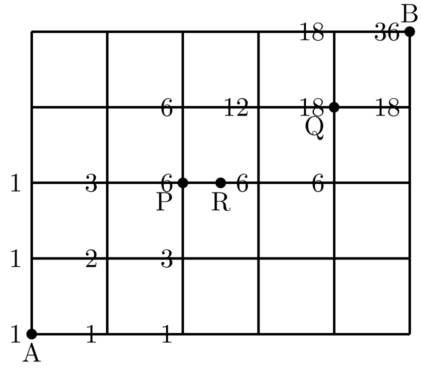
この問題は、次のような図を書いて計算することができる。

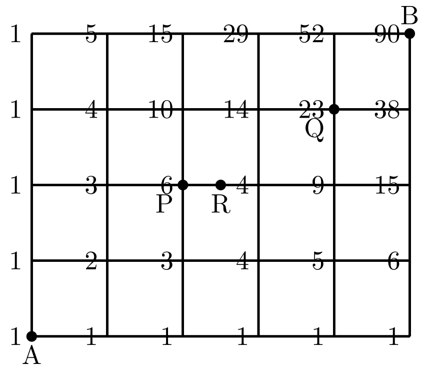


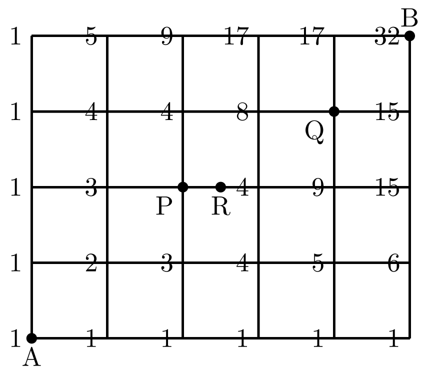
1.



2.

3. 

4. 

5. 

1.1.3　重複組み合わせ

同じ種類のものを重複して選べる場合の組み合わせの数え方を考える。これは結局、各種類のものを何個ずつ用意するかを数えることに他ならない。

これを数えるためには、選んだものを並べる場所を用意し、それを仕切って異なる種類の個数を決定する、として考えることができる。このように考えると、重複順列の考え方が応用できる。

問題 1.1.23.　1. りんごとみかんが大量にある中から 5 個選ぶとする。この時、できる組み合

わせは何通りか。

2. りんごとみかんとバナナが大量にある中から 5 個選ぶとする。この時、できる組み合わせは何通りか。

解答. 1. 置く場所が 5 箇所あって、仕切りが 1 つ。並べ方は ${}_6C_1 = 6$ 通り。

2. 置く場所が 5 箇所あって、仕切りが 2 つ。並べ方は ${}_7C_2 = 21$ 通り。

問題 1.1.24. x, y, z の 3 文字から作られる 7 次の単項式で係数が 1 のものは何種類あるか。

解答. 置く場所が 7 箇所あって、仕切りが 2 つ。並べ方は ${}_9C_2 = 36$ 通り

問題 1.1.25. 1. $x + y + z = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ をみたす整数の組 (x, y, z) は何組あるか。

2. $x + y + z = 12$ をみたす正の整数の組 (x, y, z) は何組あるか。
3. $x + y + z \leq 6$ をみたす負でない整数の組 (x, y, z) は何組あるか。

解答. 1. ${}_{11}C_2 = 55$ 通り

2. あらかじめ x, y, z に 1 加えておいて、x, y, z が 0 以上で $x+y+z = 9$ と考えると ${}_{11}C_2 = 55$ 通り
3. $x + y + z = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ のそれぞれを数えて足すと ${}_8C_2 + {}_7C_2 + {}_6C_2 + {}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2 = 84$ 通り。あるいはもう一文字 w を増やして $x + y + z + w = 6$ と考えて ${}_9C_3 = 84$ 通り

この最後の問題の二通りの解き方を比較することで二項係数に関する関係式

$${}_9C_3 = {}_8C_2 + {}_7C_2 + {}_6C_2 + {}_5C_2 + {}_4C_2 + {}_3C_2 + {}_2C_2$$

を考えていることになる。実際、これは道順の数え上げの方法で証明することもできる。

1.1.4 円順列

円形にものを並べる場合、回転して同じになるものは同じ並べ方と数える。例えば、正三角形の頂点に三つの色を塗る場合、回転して同じになるものが三つずつあるので二通りとなる。

また、首飾りのように円形で裏表を入れ替えることもできる場合、さらに同じになるものが増える。3 種類の石で首飾りを作る場合、一通りの作り方しかない。

問題 1.1.26. 6 個の数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ を円形に並べる。

1. 並べ方の総数は何通りか
2. $1, 2$ が隣り合う並べ方は何通りか。
3. $1, 2$ が向かい合う並べ方は何通りか。

解答. 1. $5! = 120$ 通り

2. $2 \times 4! = 48$ 通り
3. $4! = 24$ 通り

問題 1.1.27. 異なる 6 個の宝石がある。

1. これらの宝石を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。
2. これらの宝石で首飾りを作るとき、何種類の首飾りができるか。
3. 6 個の宝石から 4 個を取り出し、机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。

解答. 1. $5! = 120$ 通り
2. $120/2 = 60$ 通り
3. ${}_6C_4 \times 3! = 90$ 通り

問題 1.1.28. 白玉 3 個、青玉 2 個を円形に並べる方法は何通りか。またこれに紐を通して輪を作る方法は何通りか。

解答. 青玉をどこに置くか考えると、いずれも隣り合う場合と間に一つ白玉がある場合の 2 通り

1.1.5　演習問題

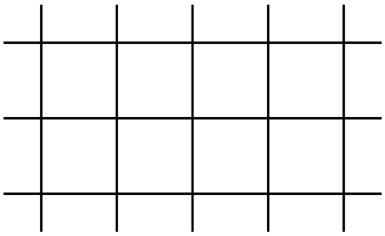
問題 1.1.29. $2, 3, 4, 5, 6$ の 5 個の数字から異なる 3 個の数字を使って 3 桁の整数を作るとき、以下のものは何個できるか。

1. 整数
2. 偶数
3. 5 の倍数
4. 4 の倍数

解答. 1. $5 \times 4 \times 3 = 60$ 通り
2. 1 の位が $2, 4, 6$ のいずれかなので、$3 \times 4 \times 3 = 36$ 通り
3. 1 の位が 5 なので、$1 \times 4 \times 3 = 12$ 通り
4. 下二桁が $24, 32, 36, 52, 56, 64$ の 6 通り、$6 \times 3 = 18$ 通り

問題 1.1.30. 図のように 5 本の平行線と、それらに直交する 3 本の平行線が、それぞれ等間隔に並んでいる。

1. この 8 本の直線のうち 4 本で囲まれた長方形は全部でいくつあるか。
2. これらの 15 個の交点から 3 点選んでできる三角形はいくつあるか。



解答. 1. 長方形を作るためには縦の 5 本から 2 本と横の 3 本から 2 本をそれぞれ選ぶ必要があり、これで十分。その選び方は ${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$ 通り。

2. 三つの頂点が三本の横線にそれぞれ一点ずつ乗る場合と、一本に二点もう一本に一点乗る場合に分けて数える。前者の場合には、一直線上に乗る場合には三角形にならないのでそれに注意すると、$5 \times 5 \times 5 - 13 = 112$ 通り。後者の場合には、どう選んでも必ず三角形になるから、直線の選び方が 3×2 通りあり、それぞれに頂点の選び方が ${}_5C_2 \times {}_5C_1$ 通りなので、$3 \times 2 \times {}_5C_2 \times {}_5C_1 = 300$ 通り。これを合わせて 412 通り

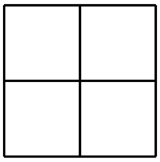
問題 1.1.31. $1, 2, 3$ の数字が書かれたカードがそれぞれ $2, 3, 4$ 枚ある。これらのカードから 4 枚を使ってできる 4 桁の整数の個数を求めよ。

解答. 3 の枚数で場合分けして数える。3 が 4 枚なら整数は 1 通り。3 が 3 枚なら残りが $1, 2$ のいずれかで、並び方が 4 通りずつなので $4 \times 2 = 8$ 通り。3 が 2 枚のとき、残りが $11, 12, 22$ のいずれかで、11 と 22 のときは並べ方がそれぞれ重複順列の考え方で ${}_4C_2$ 通り。12 のときは ${}_4C_2 \times {}_2C_1$ 通り。合わせて $2 \times {}_4C_2 + {}_4C_2 \times {}_2C_1 = 24$ 通り。3 が 1 枚のとき、残りが $112, 122, 222$ のいずれかで、$112, 122$ のときは上と同じように ${}_4C_2 \times {}_2C_1$ 通り、222 のときは 4 通り。合わせて ${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times 2 + 4 = 28$ 通り。3 が 0 枚のとき、$1122, 1222$ のいずれかで ${}_4C_2 + 4 = 10$ 通り。全部合わせると $1 + 8 + 24 + 28 + 10 = 71$ 通り

問題 1.1.32. n を自然数とする。同じ数字を繰り返し用いてよいことにして $0, 1, 2, 3,$ の 4 種類の数字を使って n 桁の整数を作る。ただし 0 以外の数字から始まり、0 を 1 回以上使うものとする。このとき全部でいくつの整数ができるか、n を用いて表せ。

解答. 0 を使うかどうかを考えずに数えると、1 番上の桁が 3 通りでそれ以外が 4 通りなので、$3 \times 4^{n-1}$ 通り。0 を一度も使わないものが 3^n 通りなので、これを除けばよく、$3 \times 4^{n-1} - 3^n = 3(4^{n-1} - 3^{n-1})$ 通り

問題 1.1.33. 図のように正方形を 4 等分した図形を赤、青、黄、黒の 4 色のうち何色かを使ってぬり分ける。隣合う部分は異なる色で、回転させて一致する塗り方は同じものと考える時、塗り方は何通りあるか。



解答. 4 色全て使う場合、円順列の考え方で $3! = 6$ 通り。3 色のみ使う場合、同じ色を二回使う必要がありこれの選び方が 4 通りあって、さらに残り 2 色の選び方が 3 通り。色を選んだ上で塗り方は 2 通り。したがってこれの組み合わせで $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り。2 色のみ使う場合、色の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通りで、色を決めたら塗り方は一通り。全て合わせると $6 + 24 + 6 = 36$ 通り。

問題 1.1.34. 9 人を次のように組分けする方法は何通りあるか。

1. 4 人、3 人、2 人の 3 組に分ける。
2. 3 人ずつ 3 組 A,B,C に分ける。
3. 3 人ずつ 3 組に分ける。
4. 5 人、2 人、 2 人の 3 組に分ける。

解答.

1. ${}_9C_4 \times {}_5C_3 = 1260$ 通り
2. ${}_9C_3 \times {}_6C_3 = 1680$ 通り
3. $1680 \div (3!) = 280$ 通り
4. ${}_9C_5 \times {}_4C_2 \div 2 = 378$ 通り

問題 1.1.35. 1 そうあたり 4 人まで乗れるボート 2 そうに 6 人が分乗する時、次のような乗り方は何通りあるか。

1. 人もボートも区別しない
2. 人は区別しないがボートは区別する
3. 人もボートも区別する
4. 人は区別するがボートは区別しない

解答.

1. 6 個のものを 2 グループに分ける。別れた後の数だけが問題になるので、4 人まで乗れることに注意して分け方は $(2, 4), (3, 3)$ の 2 通り。
2. 上で分けたものの順番を区別することになるので $(2, 4), (3, 3), (4, 2)$ の 3 通り。
3. 上の分け方でさらに人も区別する。それぞれ、片方のボートに乗る人数を決めれば決まるから ${}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_6C_2 = 50$ 通り。
4. ボートは区別しないので、$(2, 4)$ に分けるときは ${}_6C_2$ 通り、$(3, 3)$ に分けるときは ${}_6C_3 \div 2$ 通り。よって 25 通り。

問題 1.1.36. 正 10 角形の対角線は全部で何本あるか。ただし辺は対角線とは数えない。またこの頂点から 3 点選んでできる三角形は何個か。

解答. 10 個の頂点から 2 個選ぶと対角線がひけるが、辺になる場合を除くと ${}_{10}C_2 - 10 = 35$ 本。頂点から 3 つ選ぶと三角形ができるので、${}_{10}C_3 = 120$ 個。

問題 1.1.37. science の 7 文字を横 1 列に並べるとき、次の場合の数を求めよ。

1. すべての並べ方
2. sccieen のように c と e がどちらも連続した並べ方
3. s, i, n がこの順番に並ぶ（ただし隣り合っていない場合も含める）並べ方

解答.
1. $7! = 5040$ 通り
2. c, e をそれぞれ 1 文字とみなして 5 文字を並べればよく、$5! = 120$ 通り。
3. s, i, n の並べ替えが $3! = 6$ 通りあり、全体の並べ方を 6 こずつまとめることでそのうち 1 つが求める条件を満たす並べ方である。したがって $5040 \div 6 = 840$ 通り。

問題 1.1.38. 以下の n, k に対し n 個の飴を k 人に分ける方法は何通りか。

1. $n = 5, k = 3$
2. $n = 10, k = 4$

解答. 置き場所 n 個と仕切り $k - 1$ 個の並べ方を考えればよい。

1. ${}_7C_5 = 21$ 通り
2. ${}_{13}C_{10} = 286$ 通り

問題 1.1.39. $1, 2, 3, 4$ の 4 種類の数字から重複を許して 3 個の数字を取り出す。この時、作られる組の総数を求めよ。

解答. 置き場所 3 個、しきり 3 個の並べ方。${}_6C_3 = 20$ 通り。

問題 1.1.40. 白玉 4 個、黒玉 3 個、赤玉 1 個を円形に並べる方法は全部で何通りか。またこれに紐を通して輪を作る方法は何通りか。

解答. 赤玉の位置を固定して、残り 7 個の並べ方を考えると、これは白 4 個黒 3 個の重複順列の並べ方で ${}_7C_4 = 35$ 通り。

輪にすると裏表の区別がなくなるのでおよそ半分になるが、もともと左右対称な配置であれば裏表を入れ替えても変化 h しない。左右対称な配置は何通りかというと、赤の向かいが黒でなくてはならず、残り白 4 個と黒 2 個を左右 3 個ずつ同じように配置するので 3 通り。これ以外の 32 通りは全て裏表で 2 つ 1 組になるから $32 \div 2 + 3 = 19$ 通り。

問題 1.1.41. 立方体の各面に、隣り合う面は異なるように色を塗る。ただし立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

1. 異なる 6 色をすべて使って塗る方法は何通りか。

2. 異なる 5 色をすべて使って塗る方法は何通りか。

解答. 1. ある一つの色を決めてその色を上面に固定する。残り 5 色のうち、底面に塗る色を選ぶのが 5 通り。残り 4 色を側面に塗るが、これが円順列になることから、3! 通り。この組み合わせで、$5 \times 3! = 30$ 通り。

2. ある一つの色を向かい合う 2 面に塗る。この色の選び方が 5 通り。これを上面と底面に固定し、側面を塗るが、これが円順列なので 3! 通り。この組み合わせで、$5 \times 3! = 30$ 通り。

問題 1.1.42. 4 桁の整数 n において下の桁から数字を a, b, c, d とする。このとき、次の条件を満たす n は何個あるか。

1. $a < b < c < d$
2. $a \leq b \leq c \leq d$
3. $a < b < c, c \geq d$

解答. 1. 0 から 9 までの数字から 4 個選ぶことに対応する。選べば自動的に大きな順番が一つ決まるので。${}_{10}C_4 = 210$ 通り。

2. 等号が成立する個数で場合分けする。等号がないのは上と同じで 210 通り。等号が 1 個なのは、等号の場所が 3 パターンあり、それぞれについて上と同様に考えて ${}_{10}C_3 = 120$ 通り。等号が 2 個なのは、等号の場所が 3 パターンあり、それぞれについて上と同様に考えて ${}_{10}C_2 = 45$ 通り。等号が 3 個なのは、全て等しい場合で 0 を除いた 9 通り。よって、$210 + 120 + 45 + 9 = 384$ 通り。

3. c の取りうる値は 2 から 9 までであり、それぞれで場合分けして考える。$c = 2$ の場合、$(a, b) = (0, 1)$ のみで、d の取り方は $1, 2$ の 2 通りなので 2 通り。$c = 3$ の場合、$(a, b) = (0, 1), (0, 2), (1, 2)$ の ${}_3C_2 = 3$ 通り、d の取り方は $1, 2, 3$ の 3 通りなので $3 \times 3 = 9$ 通り。以下同様に考えて、$1 \times 2 + 3 \times 3 + {}_4C_2 \times 4 + {}_5C_2 \times 5 + {}_6C_2 \times 6 + {}_7C_2 \times 7 + {}_8C_2 \times 8 + {}_9C_2 \times 9 = 2 + 9 + 6 \times 4 + 10 \times 5 + 15 \times 6 + 21 \times 7 + 28 \times 8 + 36 \times 9 = 870$ 通り。

1.2　確率

確率について、集合の言葉を用いて改めて考える。

定義 1.2.1. 起こりうる場合全体のなす全体集合を全事象 U という。U のそれぞれの要素を根元事象という。また U の部分集合のことを事象という。

ここで根元事象は全て同様に確からしく起こるという前提を暗黙に設定していることに注意せよ。

この前提のもとで、各事象 $A \subset U$ の起こる確率を

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

と定義する。ここで $n(A), n(U)$ は集合 A, U の要素の個数。

例 1.2.2. サイコロ 1 個を投げて奇数の目が出る確率を求めよう。

まず起こりうる場合全体を $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ の 6 個の要素からなる集合とする。$n(U) = 6$ である。また、これらの起こる「確からしさ」は全て等しいと仮定している。

このとき、偶数の目が出るという事象を $A = \{2, 4, 6\}$ とすると、$n(A) = 3$ であり、

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

と計算できる。

問題 1.2.3. 3 枚の硬貨を同時に投げるとき、表が 1 枚、裏が 2 枚でる確率を求めよう。

1. 全事象 U を設定せよ。
2. 表が 1 枚、裏が 2 枚という事象 A はどのようになるか。
3. $P(A)$ を求めよ。

解答.
1. 根元事象 U は 3 まいぞれぞれの裏表 2 通りのパターンの組み合わせ。ここでは表を 1、裏を 0 と表すことにすると、

$$U = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\}$$

であり、$n(U) = 8$ である。
2. このうち、表が 1 枚なのは $A = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ で $n(A) = 3$ である。
3. よって $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)} = \dfrac{3}{8}$ となる。

高校数学で扱う範囲においては、根元事象は全て同様に確からしく起こるという前提のもとで確率を計算する。

問題文によっては何が根元事象か明記されている場合もあるし、場合によってはそれを自分で読み取らなくてはならない。

定義 1.2.4. 事象 $A, B \subset U$ に対して、積事象とは共通部分 $A \cap B$ のことであり、和事象とは和集合 $A \cup B$ のこと。余事象とは補集合 $\overline{A}$ のこと。事象 A, B が排反であるとは $A \cap B = \emptyset$ であること。

ここで用いた $\cap, \subset, \cup$ などの記号は、集合というものを扱う上での基本的な操作を表すものです。これらについてはまた改めて説明しますが、集合というのは「もの」の集まりで、$\cap$ は共通部分をとる、$\cup$ は合併をとる、という操作を表し、$\subset$ はある集合が別の集合に含まれるということ、$\overline{A}$ は A に含まれないもの全体、$\emptyset$ は何もものが属さない集合を表します。

問題 1.2.5. 2 個のサイコロを投げるとき、目の和が素数である確率を求めよ。

解答. 根元事象は 2 個のサイコロの目の組み合わせで 36 通り。このうち、和が素数、つまり $2, 3, 5, 7, 11$ になるのは $1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15$ 通り。よって $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

問題 1.2.6. 4 人がじゃんけんを 1 回するとき、次の確率を求めよ。

1. 1 人だけが勝つ確率。
2. 2 人が勝つ確率。
3. あいこになる確率。

解答. 4 人でじゃんけんをするとき、手の出し方は 3^4 通り。

1. 1 人だけ勝つ組み合わせは、誰が勝つかが 4 通り、勝つ人の手が 3 通りなので、$\dfrac{4 \times 3}{3^4} = \dfrac{4}{27}$
2. 2 人が勝つ組み合わせは、誰が勝つかが ${}_4C_2 = 6$ 通り、勝つ人の手が 3 通りなので、$\dfrac{6 \times 3}{3^4} = \dfrac{2}{9}$
3. 上と同様に考えて、3 人が勝つ確率は $\dfrac{4}{27}$ であるので、あいこになる確率は $1 - \dfrac{4}{27} - \dfrac{2}{9} - \dfrac{4}{27} = \dfrac{13}{27}$

問題 1.2.7. $0, 1, 2, 3, 4$ から異なる 3 個の数字を用いて 3 桁の整数を作る。次の確率を求めよ。

1. できた整数が 3 の倍数である確率。
2. 十の位が一の位より大きい確率。

解答. 3 桁の整数は $4 \times 4 \times 3 = 48$ 通り

1. 3 の倍数になるのは、数の組み合わせが $(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)$ のいずれかで $4 + 4 + 6 + 6 = 20$ 通りなので $\dfrac{20}{48} = \dfrac{5}{12}$ が求める確率

2. 十の位と一の位は異なり、大きいものと小さいものが同じだけあるので、$\dfrac{1}{2}$ が求める確率

問題 1.2.8. 15 本のくじの中に何本かの当たりくじが入っている。この中から同時に 2 本引くとき、2 本とも当たる確率が $\dfrac{2}{21}$ であるという。当たりくじは何本あるか。

解答. 15 本から 2 本選ぶ選び方は ${}_{15}C_2 = 105$ 通り。2 本ともあたりになる確率は $\dfrac{2}{21} = \dfrac{10}{105}$ なので、当たりくじが 5 本の時 ${}_5C_2 = 10$ となり、これが求める答えである。

問題 1.2.9. 袋の中に赤玉 5 個、青玉 4 個、白玉 3 個が入っている。この中から同時に 3 個取り出すとき、次の確率を求めよ。

1. 3 個のうち 2 個以上が赤玉である確率。
2. 3 個の色が全て同じである確率。

解答. ボールの選び方は ${}_{12}C_3 = 220$ 通り

1. 3 個とも赤は ${}_5C_3 = 10$ 通り、赤が 2 個で青が 1 個は ${}_5C_2 \times {}_4C_1 = 40$ 通り、赤が 2 個で白が 1 個は ${}_5C_2 \times {}_3C_1 = 30$ 通り。よって $\dfrac{80}{220} = \dfrac{4}{11}$
2. 3 個とも赤は 10 通り、3 個とも青は ${}_4C_3 = 4$ 通り、3 個とも白は ${}_3C_3 = 1$ 通り。よって $\dfrac{15}{220}$

問題 1.2.10. 2 つのサイコロを同時に投げる試行を考える。A は少なくとも 1 つ 3 の目が出る事象、B は出た目の和が偶数となる事象。

1. A または B が起こる確率を求めよ
2. A, B のどちらか一方のみが起こる確率を求めよ

解答. 2 つのサイコロの出目は $6 \times 6 = 36$ 通り

1. A は 11 通り、B は 18 通り、A と B が同時に起こるのは 5 通りなので、$\dfrac{11+18-5}{36} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{11+18-5-5}{36} = \dfrac{19}{36}$

1.2.1　反復試行

ここでは独立な試行を繰り返し行うことについて考える。特に、二項分布や幾何分布といった考え方は応用上も重要なので押さえておきたい。

まずは独立であるということについて確認しよう。

定義 1.2.11 (事象の独立性)**.** 事象 A と事象 B がともに起こるという事象を C とすると、

$$P(C) = P(A)P(B)$$

が成り立つとき、A, B は独立であるという。

定義 1.2.12 (独立試行)**.** 二つの試行 T_1, T_2 について、これの結果が互いに影響を及ぼさないとき、T_1 と T_2 は独立であるという。正確には、T_1 で事象 A、T_2 で事象 B が起こるという事象を C とすると、

$$P(C) = P(A)P(B)$$

が全ての A, B について成り立つとき T_1, T_2 は独立であるという。

例 1.2.13. 大小 2 個のサイコロを投げる。大きいサイコロが奇数の目で、小さいサイコロが 5 以上の目が出る確率を求めよう。

まず根元事象を大きいサイコロと小さいサイコロの目を並べて

$$U = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (6,6)\}$$

と表すことにしよう。実はこれを根元事象とすることで、自動的にサイコロ A の結果と B の結果が独立になってしまう。(もちろんこれが独立ということは、日常的な感覚にはあっている。)

A を大きいサイコロが奇数という事象を表すと、

$$A = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (3,1), (3,2), \ldots, (5,6)\}$$

となり $n(A) = 18$ である。B を小さいサイコロが 5 以上という事象とすると、

$$B = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6), \ldots, (6,5), (6,6)\}$$

となり $n(B) = 12$ である。

よって求める確率は A, B がともに起こる事象の確率で、

$$P(A) \times P(B) = \frac{18}{36} \times \frac{12}{36} = \frac{1}{6}$$

と計算できる。

例 1.2.14. 10 本中当たりくじが 2 本のくじ引きを 2 人の人が順番に引く。このとき、一人目が当たるという事象 A と二人目が当たるという事象 B を考えよう。まず $P(A) = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$ である。$P(B)$ を計算するために、A が当たったか否かで場合分けすると、

$$P(B) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$$

である。

さて、A と B がともに起こる、つまり一人目も二人目もどちらも当たる確率を計算すると、二人のくじの選び方が 90 通りあり、そのうち二人とも当たる組み合わせは 2 通りだから $\dfrac{2}{90}$ となる。

このとき

$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \neq \frac{1}{45}$$

であるから、A と B は独立ではない。

日常的な感覚で言えば、A が当たるか否かと B が当たるか否かに関係があるということだが、それは確かにそうで、上の定義もそれを支持する結果になっていることがわかる。

問題 1.2.15. A, B, C の三人がある的に向かって 1 つのボールを投げる時、的に当てる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ である。この三人がそれぞれ 1 つのボールを投げる時、次の確率を求めよ。ただし、三人の試行は独立であるとする。

1. A だけが的に当てる確率
2. 少なくとも一人が的に当てる確率

解答.

1. A が的に当て、B, C が外す確率なので、独立であることから $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$ が求める確率
2. 余事象として、全員外す確率を計算すると $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{18}$ なので、$\frac{17}{18}$ が求める確率

実はこの問題の設定は、初めに述べた確率の定義からは少し外れたものになっている。（根元事象は何か？）しかし直感的には受け入れられる問題設定であろう。このように、実際に用いられる確率の定義は初めに説明したものよりはもう少し一般的なものになっていて、統計学などで用いられる確率の考え方もそのような一般的なものであるが、ここではこれ以上詳しく説明しない。

問題 1.2.16. 赤球が 3 個、青球が 3 個入った袋の中からよくかき混ぜてから同時に 2 個取り出し、色を確認して元に戻す。この試行を 2 回繰り返すとき、取り出される 4 個のうち 2 個が赤球、2 個が青球である確率を求めよ。

解答. 2 回の試行は独立である。

1 回目に赤が 2 個、2 回目に青が 2 個となる確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{25}$ である。1 回目も 2 回目もに赤と青が 1 個ずつとなる確率は $\frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{9}{100}$ である。1 回目に青が 2 個、2 回目に赤が 2 個となる確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{25}$ である。

以上より求める確率は $\frac{17}{100}$ である。

問題 1.2.17. 1 個のサイコロを 3 回投げるとき、次の確率を求めよ。

1. 全て 4 以上である確率
2. 出る目の最小値が 3 である確率

解答.

1. $(\frac{3}{6})^3 = \frac{1}{8}$ が求める確率

2. 全て 3 以上であり、かつ 3 が少なくとも 1 度は出る確率を求める。これは全て 3 以上の確率から全て 4 以上の確率を引けばよく、$(\frac{4}{6})^3 - (\frac{3}{6})^3 = \frac{37}{216}$ が求める確率。

問題 1.2.18 (二項分布)**.** 表裏が均等に出るコインを 4 回投げる。2 回裏が出る確率を求めよ。

解答. $_4C_2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$

問題 1.2.19. 箱の中に赤い玉が 2 個と白い玉が 1 個入っている。中身を見ずに繰り返し取り出し、5 回中 3 回赤が出る確率を求めよ。

解答. $_5C_3(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{3})^2 = \frac{80}{243}$

問題 1.2.20. 1 個のサイコロを 5 回投げるとき、素数の目がちょうど 4 回出る確率と、4 回以上出る確率を求めよ。

解答. 素数は $2, 3, 5$ で 1 回振って素数が出る確率は $\frac{1}{2}$ である。ちょうど 4 回素数が出るので、残り一回はそれ以外で、出る順番の決まり方は $_5C_1 = 5$ 通りなので、$_5C_1 \times (\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2}) = \frac{5}{32}$

また、5 回とも素数である確率は $\frac{1}{32}$ なので、これと合わせて 4 回以上出る確率は $\frac{3}{16}$ である。

問題 1.2.21. A, B の 2 チームが試合を行い、先に 4 勝したチームが優勝とする。A が B に勝つ確率は常に $\frac{1}{3}$ で一定であり、1 試合目は B チームが勝ったとする。このとき A が優勝する確率を求めよ。

解答. 残り試合で A が 4 勝し、B は $0, 1, 2$ 勝のいずれか。B が 0 勝の確率は $(\frac{1}{3})^4$ で、B が 1 勝の確率は残り 5 試合のうち 4 試合目までに B が勝たなければならないことに注意して $_4C_1(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})$ で、B が 2 勝の確率は残り 6 試合のうち 5 試合目までに B が 2 勝しなければならないので $_5C_2(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^2$ である。これを合計すると $\frac{1}{81} + \frac{8}{243} + \frac{40}{729} = \frac{73}{729}$ が求める確率。

問題 1.2.22 (幾何分布)**.** 表裏が均等に出るコインを繰り返し投げる。4 回目に初めて裏が出る確率を求めよ。

解答. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

問題 1.2.23. 箱の中に赤い玉が 2 個と白い玉が 1 個入っている。中身を見ずに取り出し、3 回目に初めて白い玉が出る確率を求めよ。

解答. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

1.2.2　条件付き確率

条件付き確率というのは、ある状況を仮定した場合にある事象が起こる確率のこと。

一方で二つの事象が共に起こる確率のことを同時確率という。

この二つは混同しやすいので注意しよう。条件付き確率の方は、片方の事象が起こると仮定している。

定義 1.2.24 (条件付き確率)**.** 全事象 U と事象 A, B について、事象 A が起こった時に事象 B が起こる確率を条件付き確率といい、$P(B|A)$ や $P_A(B)$ などと書く。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

となる。

また、この定義の式を変形した次の式はベイズの定理と呼ばれる。

定理 1.2.25 (ベイズの定理)**.**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

これらについては分割表を書いて理解するのがよい。

問題 1.2.26. 赤玉 5 個、青玉 3 個が入っている袋から、玉を 1 個取り出し、それをもとに戻さないで、続いてもう 1 個取り出すとき、次の確率を求めよ。

1. 1 回目に赤玉が出たとき、2 回目も赤玉が出る確率
2. 2 回目に青玉が出たとき、1 回目に赤玉が出る確率

解答.
1. 求めるのは 1 回目に赤玉が出たという条件のもと 2 回目に赤玉が出る条件付き確率で、この条件のもとで袋の中身は赤 4 青 3 なので $\frac{4}{7}$ が求める確率。
2. 求めるのは 1 回目に青玉が出たという条件のもと 2 回目に赤玉が出る条件付き確率で、この条件のもとで袋の中身は赤 5 青 2 なので $\frac{5}{7}$ が求める確率。

問題 1.2.27. 13 本のくじの中に当たりくじが 3 本ある。一度引いたくじはもとに戻さない。

1. はじめに a が 1 本引き、次に b が 1 本引くとき、次の確率を求めよ。
   (a) a, b ともに当たる確率
   (b) b が当たる確率
2. 初め a が 1 本ずつ 2 回引き、次に b が 1 本引くとき、a, b が 1 本ずつ当たる確率を求めよ。

解答.
1. (a) $\frac{3}{13} \times \frac{2}{12} = \frac{1}{26}$

(b) $\dfrac{1}{26} + \dfrac{10}{13} \times \dfrac{3}{12} = \dfrac{3}{13}$

2. $(\dfrac{3}{13} \times \dfrac{10}{12} + \dfrac{10}{13} \times \dfrac{3}{12}) \times \dfrac{2}{11} = \dfrac{10}{143}$

問題 1.2.28. ある工場では、同じ製品をいくつかの機械で製造している。不良品が現れる確率は機械 A の場合は 4% であるが、それ以外の機械では 7% に上がる。また、機械 A で製品全体の 60% を作る。製品の中から 1 個を取り出したとき、

1. それが不良品である確率を求めよ
2. 不良品であったとき、それが機械 A の製品である確率を求めよ

解答.

1. 不良品である確率は A で作った不良品と B で作った不良品の二つの場合があり、これらを合わせると不良品である確率は

$$\frac{4}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{7}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{13}{250}$$

と計算できる。

2. 不良品のうち A で作ったものの割合を考える。つまりこれは条件付き確率を求めることになる。上で求めたことから

$$\begin{aligned}\frac{\frac{4}{100} \times \frac{60}{100}}{\frac{4}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{7}{100} \times \frac{40}{100}} &= \frac{4 \times 60}{4 \times 60 + 7 \times 40} \\ &= \frac{6}{13}\end{aligned}$$

となる。

問題 1.2.29. 1 万人に 1 人の割合でかかっていることがわかる病気がある。この病気の簡易検査は、病気にかかっている人は 99% 陽性判定、病気にかかっていない人は 1% 陽性に誤判定が出る。この検査で陽性判定が出た時、実際に病気にかかっている確率を求めよ。

解答.

$$\frac{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{10000} \times \frac{99}{100} + \frac{9999}{10000} \times \frac{1}{100}} = \frac{99}{99 + 9999} = 0.0098 \cdots$$

条件付き確率について、次のような有名な問題がある。

問題 1.2.30 (モンティ・ホール問題)**.** あるクイズ番組で、プレーヤーの前に閉じた 3 つのドアがあり、その中から一つを選ぶ。3 つのドアのうち 1 つのドアの後ろには景品の新車が、2 つのドアの後ろには、はずれを意味するヤギがいる。プレーヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。

プレーヤーが 1 つのドアを選択した後、司会のモンティが残り 2 つのドアのうちヤギがいるドア 1 つを開け、プレーヤーにヤギを見せる。ここでプレーヤーは、最初に選んだドアを、残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。プレーヤーはドアを変更すべきだろうか？

1.2.3　確認問題

問題 1.2.31. 男子 4 人と女子 2 人が次のように並ぶとき、各場合の確率を求めよ。

1. 一列に並ぶとき、両端が男子になる確率。
2. 円形に並ぶとき、女子二人が隣り合う確率。

解答.
1. 一列に並べる方法が 6! 通りあり、両端が男子である並び方は $2! \times 4!$ 通り。したがって、求める確率は $\dfrac{2! \times 4!}{6!} = \dfrac{1}{15}$ である。
2. 円形に並べる方法が 5! 通り。これのうち、女 2 人が並ぶ方法を数える。女子 2 人をひとまとまりと考えて、5 人を円に並べる方法が 4! 通りでこれらについて女子 2 人の左右が 2 通りあるから $4! \times 2$ 通り。したがって、求める確率は $\dfrac{4! \times 2}{5!} = \dfrac{2}{5}$ である。

問題 1.2.32. 1 から 9 までの数字が書かれたカードが各数字 3 枚ずつの合計 27 枚ある。この中から 2 枚取り出した時、次の確率を求めよ。

1. 2 枚が同じ数字である確率
2. 2 枚が同じ数字であるか、2 枚の数字の和が 5 以下である確率

解答.
1. 2 枚取り出す方法は ${}_{27}C_2$ 通りあり、これらのうちで 2 枚とも同じであるのは ${}_3C_2 \times 9$ 通り。よって求める確率は $\dfrac{{}_3C_2 \times 9}{{}_{27}C_2} = \dfrac{1}{13}$ である。
2. 上に加えて 2 枚の和が 5 以下である選び方のうち異なる数字のものは $(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)$ のいずれかの組み合わせで、それぞれ 9 組ずつあるので、求める確率は $\dfrac{{}_3C_2 \times 9 + 4 \times 9}{{}_{27}C_2} = \dfrac{14}{78}$ である。

問題 1.2.33. 赤、青、黄の札が 4 枚ずつあり、どの色の札にも 1 から 4 までの番号が 1 つずつ書かれている。この 12 枚の札から無作為に 3 枚取り出したとき、次のことが起こる確率を求めよ。

1. 全部同じ色になる
2. 番号が全部異なる
3. 色も番号も全部異なる

解答.
1. $\dfrac{3 \times {}_4C_3}{{}_{12}C_3} = \dfrac{3}{55}$
2. 番号の選び方が ${}_4C_3$ 通りある。それぞれの番号の選び方ごとに色の決め方が 3^3 通りあるので、$\dfrac{{}_4C_3 \times 3^3}{{}_{12}C_3} = \dfrac{27}{55}$
3. 上と同様番号の選び方が ${}_4C_3$ 通りあり、それぞれの番号の選び方ごとに色の決め方が 3! 通りあるので、$\dfrac{{}_4C_3 \times 3!}{{}_{12}C_3} = \dfrac{6}{55}$

問題 1.2.34. 1000 から 9999 までの数から 1 つを無作為に選び出す時、次の確率を求めよ。

1. 少なくとも 1 つ 0 が含まれている確率
2. 同じ数字が 2 つ以上含まれている確率

解答. 全事象は $9999 - 999 = 9000$ 通り。

1. 1 つも 0 が含まれないものは 1 から 9 までの数字のみ使うもので、9^4 通りある。したがって $\dfrac{9^4}{9000} = \dfrac{9^3}{1000} = \dfrac{729}{1000}$
2. 同じ数字を使わないものは、$9 \times 9 \times 8 \times 7$ 通りある。したがって $\dfrac{9 \times 9 \times 8 \times 7}{9000} = \dfrac{63}{125}$

問題 1.2.35. x 軸上を動く点 A があり、最初は原点にある。硬貨を投げて表が出たら正の方向に 1 だけ進み、裏が出たら負の方向に 1 だけ進む。硬貨を 6 回投げるものとして、次の確率を求めよ。

1. 点 A が原点に戻る確率
2. 点 A が 2 回目に原点に戻り、かつ 6 回目に原点に戻る確率

解答.
1. 6 回のうち表が 3 回裏が 3 回でる場合を考える。$\dfrac{{}_6C_3}{2^6} = \dfrac{5}{16}$
2. まず 2 回目までの試行で原点に戻る確率が $\dfrac{{}_2C_1}{2^2}$ であり、残り 4 回でまた原点に戻る確率が $\dfrac{{}_4C_2}{2^4}$ である。これらは独立なので、$\dfrac{{}_2C_1}{2^2} \times \dfrac{{}_4C_2}{2^4} = \dfrac{3}{16}$ が求める確率。

問題 1.2.36. 箱 A には赤玉 3 個、青玉 2 個、箱 B には赤玉 2 個、青玉 2 個が入っている。

1. 箱 A から玉を 1 個取り出し、それを箱 B に入れる。次に箱 B から玉を 1 個取り出し、それを箱 A に入れる。このとき、箱 A の赤玉の個数が初めと変わらない確率を求めよ。
2. 箱 A から玉を 2 個取り出し、それを箱 B に入れた後、箱 B から玉を 2 個取り出すとき、それが 2 個とも赤玉である確率を求めよ。

解答.
1. 最初に A から赤を取り出した場合には次に B から赤を取り出し、最初に A から青を取り出した場合には次に B から青を取り出す確率を考える。$\dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$
2. 最初に A から取り出した玉の色で場合分けして考える。$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2} + \dfrac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} \times \dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2} + \dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \dfrac{39}{150}$

問題 1.2.37. 袋の中に、赤玉 2 個と白玉 3 個が入っている。A, B がこの順に交互に 1 個ずつ玉を取り出し、2 個目の赤玉を取り出したほうを勝ちとする。ただし、取り出した玉はもとに戻さない。このとき、B が勝つ確率を求めよ。

解答. B が勝つためには、赤が 2 連続で出るか、最初 3 回中赤が 1 回だけで 4 回目に赤が出る場合のいずれか。それぞれの確率を足せばよく $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{2 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 \times 2}{5 \times 4 \times 3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{5}$

問題 1.2.38. 3 個のサイコロを同時に投げ、出た目の最大値を X、最小値を Y とし、その差 $X - Y$

を Z とする。

1. $Z=4$ となる確率を求めよ
2. $Z=4$ という条件のもとで、$X=5$ となる条件付き確率を求めよ

解答.
1. $X=6, Y=2$ または $X=5, Y=1$ のいずれか。それぞれの確率を計算しよう。$X=6, Y=2$ となるためには $2,6$ がそれぞれ少なくとも 1 回でて残りは 2 以上 6 以下。この場合の数を数えるには、次のように考えればよい。まず 2 から 6 のいずれかのみが出る場合の数は 5^3 通り。これのうち、6 が出ないものは 4^3 通り、2 が出ないものは 4^3 通り、$2,6$ いずれも出ないものは 3^4 通り。少なくとも $2,6$ が 1 回ずつ出るものは、2 が出ないものと 6 が出ないものを取り除き、重複する $2,6$ が出ないものを足せばよいので、$5^3-4^3-4^3+3^3$ が求める場合の数。
$X=5, Y=1$ の場合も同様に計算できる。よって、確率は $\dfrac{2\times(5^3-4^3-4^3+3^3)}{6^3}=\dfrac{2}{9}$
2. 上で説明したように、$Z=4$ となるには $X=5,6$ のいずれかで、それぞれの確率は等しい。よって求める条件付き確率は $\dfrac{1}{2}$

問題 1.2.39. 袋 A には赤玉 2 個、白玉 5 個、袋 B には赤玉 3 個、白玉 4 個、袋 C には赤玉 5 個、白玉が 2 個入っている。サイコロを投げて、1 の目が出たら袋 A から、$2,3$ の目が出たら袋 B から、$4,5,6$ の目が出たら袋 C から玉を 1 個出す。

1. 取り出した玉が赤玉である確率を求めよ
2. 取り出した玉が赤玉であるとき、それが袋 A から取り出された玉である条件付き確率を求めよ

解答.
1. サイコロの目で場合分けして計算すると、$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{3}{6}\times\dfrac{5}{7}=\dfrac{23}{42}$
2. 上の計算から、$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{7}/\dfrac{23}{42}=\dfrac{2}{23}$

1.3　二項定理とパスカルの三角形

1.3.1　二項定理

$(x+y)^n$ を展開した式の係数について調べよう。まずは二項係数について復習する。

定義 1.3.1. 自然数 n と自然数 $k \leq n$ に対し

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} $$

と定義し、これを**二項係数**と呼ぶ。

二項係数の性質で重要なものは以下の二つである。

定理 1.3.2.
1. ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$
2. ${}_nC_k = {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$

証明.
1.

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = {}_nC_{n-k} $$

2.

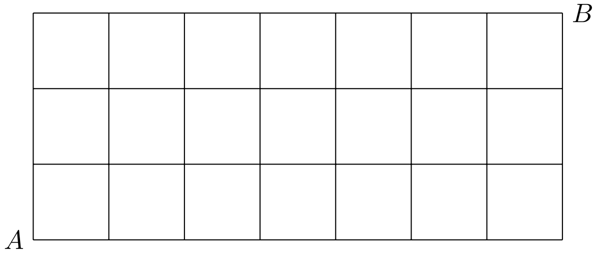
$$ \begin{aligned} {}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{1}{n-k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{1}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n}{(n-k)k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} = {}_nC_k \end{aligned} $$

□

この様子は Pascal の三角形を書くことでも確認できる。

二個目の式を用いて ${}_nC_k$ を定義することもできる。これを二項係数の再帰的定義という。

問 題 1.3.3. 右の図のような格子状の道を点 A から点 B まで最短で移動する経路の選び方は何通りか。



解答. 上に 3 回、右に 7 回進む。${}_{10}C_3 = 120$ 通り

問題 1.3.4. 次の等式が成り立つことを示せ。

$$k{}_nC_k = n{}_{n-1}C_{k-1}$$

解答.

$$k{}_nC_k = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n{}_{n-k}C_{k-1}$$

定理 1.3.5 (二項定理)**.**

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_nx^0y^n$$

例 1.3.6. $(2x+3y)^4$ を展開する。

$$\begin{aligned}(2x+3y)^4 &= {}_4C_0(2x)^4 + {}_4C_1(2x)^3(3y) + {}_4C_2(2x)^2(3y)^2 + {}_4C_3(2x)(3y)^3 + {}_4C_4(3y)^4 \\ &= 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4\end{aligned}$$

問題 1.3.7. 次の式を展開せよ。

1. $(x+4)^4$
2. $(3x-2y)^5$
3. $(2x^2-y)^3$
4. $(x^2-\frac{2}{x})^4$

解答.
1. $x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256$
2. $243x^5 - 810x^4y + 1080x^3y^2 - 720x^2y^3 + 240xy^4 - 32y^5$
3. $8x^6 - 12x^4y + 6x^2y^2 - y^3$
4. $x^8 - 8x^5 + 24x^2 - \frac{32}{x} + \frac{16}{x^4}$

問題 1.3.8. 次の式を展開した時の [ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

1. $(a-3b)^5$,　$[a^3b^2]$
2. $(x^2-\frac{2}{x})^6$,　$[x^6, \text{定数項}]$

解答.
1. ${}_5C_2a^3(-3b)^2 = 90a^3b^2$
2. ${}_6C_4(x^2)^4(-\frac{2}{x})^2 = 60x^6, {}_6C_2(x^2)^2(-\frac{2}{x})^4 = 240$

問題 1.3.9. 自然数 n に対して以下を計算せよ。

1.

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

2.

$${}_nC_1 + 2{}_nC_n + \cdots + (n-1){}_nC_{n-1} + n{}_nC_n$$

解答. 1.

$$2^n = (1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

2.

$$\begin{aligned}{}_nC_1 + 2{}_nC_n + \cdots + (n-1){}_nC_{n-1} + n{}_nC_n &= n + n{}_{n-1}C_1 + n{}_{n-1}C_2 + \cdots + n{}_{n-1}C_{n-1} + n \\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

問題 1.3.10. 次の等式を証明せよ。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_k = {}_{n+1}C_k$$

問題 1.3.11. 以下の問いに答えよ。

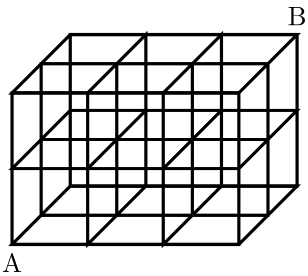
1. 11^{13} の下 3 桁を求めよ。
2. 29^{51} を 900 で割ったあまりを求めよ。

解答. 1. $(10+1)^13 = 10^{13} + \cdots + {}_{13}C_3 10^3 + {}_{13}C_2 10^2 + {}_{13}C_1 10^1 + {}_{13}C_0 = \cdots + 7800 + 130 + 1$ なので、931

2. $(30-1)^{51} = \cdots + {}_{51}C_2 30^2 (-1)^49 + {}_{51}C_1 30^1 (-1)^50 + {}_{51}C_0 (-1)^{51} = \cdots 51 \times 30 - 1$ なので、629

3 変数以上でも同様に計算できる。

問題 1.3.12. 次の図のような直方体状に並んだ格子の点 A から点 B まで最短で進む経路は何通り



あるか。

解答. 右に 3 回、上に 2 回、奥に 2 回進む。

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

定理 1.3.13 (多項定理)**.**

$$(x+y+z)^n = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i y^j z^{n-i-j}$$

この係数が ${}_nC_i \times {}_{n-i}C_j$ と一致することは次のように計算すると確かめられる。

$$ {}_nC_i \times {}_{n-i}C_j = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} $$

問題 1.3.14. 次の式を展開した時の [ ] 内に指定された項の係数を求めよ。

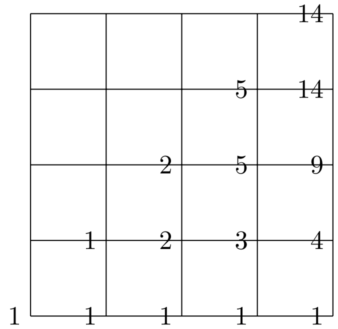
1. $(2x-y-3z)^6, [xy^3z^2]$
2. $(1+x+x^2)^8, [x^4]$
3. $(x+\dfrac{1}{x^2}+1)^5$, 定数項

解答.

1. $\dfrac{6!}{1!3!2!}(2x)^1(-y)^3(-3z)^2 =$
2. $a+b+c=8$ で $1^a x^b (x^2)^c = x^{b+2c}$ なので、$b+2c=4$ となるためには $(a,b,c) = (4,4,0),(5,2,1),(6,0,2)$ である。$\dfrac{8!}{4!4!}1^4x^4(x^2)^0 + \dfrac{8!}{5!2!1!}1^5x^2(x^2)^1 + \dfrac{8!}{6!2!}1^6x^0(x^2)^2 = 70x^4+168x^4+28x^4 = 266x^4$
3. $a+b+c=5$ で $x^a(\dfrac{1}{x^2})^b1^c = x^{a-2b}$ なので、$a-2b=0$ となるためには $(a,b,c) = (0,0,5),(2,1,2)$ である。$\dfrac{5!}{5!}1^5 + \dfrac{5!}{2!1!2!}x^2\dfrac{1}{x^2}1^2 = 31$

1.3.2　カタラン数と母関数

$n \times n$ の正方形の格子状の道を、対角線を跨がないように左下から右上まで歩く方法を数える。パスカルの三角形と同様に、数を並べて計算できる。



これは次のように直接数えることもできる。対角線より一個上の斜めの線を考える。経路が対角線をまたぐなら、この斜め線を通る。最初に斜め線を踏む点から先を折り返すと、(n,n) が $(n-1,n+1)$ に映る。このようにして対角線をまたぐ経路から $(0,0),(n-1,n+1)$ 間の最短経路が作れるが、逆にこの経路から元の対角線をまたぐ経路を復元できるので、

$$ {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{1}{n+1}{}_{2n}C_n $$

と計算できる。

定義 1.3.15 (カタラン数)**.**

$$C_n = \frac{{}_{2n}C_n}{n+1}$$

経路のカウントを次のように行う。一辺 n マスの正方形の経路を、対角線を通り過ぎずに右下のみを通って左下の頂点から右上の頂点まで。対角線に (i,i) ぶつかる経路のカウントを i について足し上げる。これによって、次のようなカタラン数を求める式を導くことができる。

命題 1.3.16 (カタラン数の漸化式)**.** C_n は次の式を満たす。

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_{n+1} &= \begin{cases} C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{n/2}C_{n/2} & n \text{ が偶数} \\ C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_{(n-1)/2}C_{(n+1)/2} & n \text{ が偶数} \end{cases} \end{aligned}$$

この式を利用することで、次のようにカタラン数を順に計算することができる。

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \times 1 = 1 \\ C_2 &= 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2 \\ C_3 &= 1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 5 \\ C_4 &= 1 \times 5 + 2 \times 2 + 5 \times 1 = 14 \end{aligned}$$

このカタラン数には色々な組み合わせ的な解釈が存在するので、それを紹介する。

例 1.3.17 (トーナメントの組み合わせ)**.** $n+1$ 人のトーナメントの作り方は C_n 通り。$n+2$ 人のトーナメントを作るとすると、決勝戦の手前でトーナメントを二つに分割できる。左の人数を $i+1$ 人、右の人数を $n-i+1$ 人として、$i=0,1,\ldots,n$ まで足し合わせると合計がわかり、これが上の漸化式を与える。

このトーナメントの組み合わせ数と初めに説明した格子の経路の数は次のように対応づけることができる。トーナメントの枝に優勝から深さ優先で端から順に番号を降っていく。この番号に対して、その枝が左右のどちら側にあるかに応じて l, r をつける。この l, r に応じて経路を作る。

例 1.3.18 (かっこの付け方)**.** 開きカッコと閉じカッコを n 個ずつ、「正しく」並べる方法は C_n 通り。二組の場合、$()(), (())$ の 2 通り。三組の場合、$()()(), ()(()), (())(), (()()), ((()))$ の 5 通り。

カッコ付けとトーナメントは、トーナメントで試合を行う順にカッコをつけていくことで対応させることができる。

例 1.3.19 (多角形分割)**.** $n+2$ 角形に対角線を $n-1$ 本引いて三角形に分割するやり方は C_n である。

$n+3$ 角形を考え、A_0 から A_{n+2} までを頂点とする。分割を与えると A_nA_{n+1} を辺にもつ三角形がただ一つ決まり、その三角形の残りの頂点を A_i とすると、A_0 から A_iA_{n+2} までの作る $i+2$ 角形と A_i から A_{n+1} の作る $n-i+2$ 角形の分割を考えて、足し合わせればよい。

多角形の三角形分割とカッコ付けの対応を直接記述しよう。$n+1$ 角形の辺のうち一つをのぞいて $a_1, a_2, \ldots, a_n$ と順に名前をつける。これに対応して $a_1 a_2 \cdots a_n$ という文字列を作る。三角形分割が与えられたとき、文字列に三角形ができる過程に対応してカッコをつけていく。

これらの場合の数の比較について、上に述べた場合以外に直接その対応を記述できるか試みよ。

さて、カタラン数について、次のような母関数と呼ばれる式が存在する。

$$\begin{aligned} F(x) &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \cdots \end{aligned}$$

とするとき、この $F(x)$ を x についてのより簡単な式で表示しよう。

カタラン数は次の式を用いて順次計算することができた。

$$C_{n+1} = \begin{cases} C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{n/2} C_{n/2} & n \text{ が偶数} \\ C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \cdots + C_{(n-1)/2} C_{(n+1)/2} & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

があるので、これを利用する。

$$\begin{aligned} F(x)^2 = C_0 C_0 &+ (C_0 C_1 + C_1 C_0)x + (C_0 C_2 + C_1 C_1 + C_2 C_0)x^2 \\ &+ (C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

となるので、

$$F(x)^2 = F(x) - x$$

となり、これを $F(x)$ についての二次方程式とみなすことで

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

が得られる。つまり、

$$\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

となることがわかった。

さらに、この母関数を用いて C_n の一般項を以下のようにして導出することができる。

非整数の n に一般化された二項定理

$$\sqrt{1+x} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1} t + \binom{1/2}{2} t^2 + \cdots$$

を用いる。

$$\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} k! (k-1)!}$$

であるから $\sqrt{1-4x}$ の x^k の係数は

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{k}(-4x)^k &= (-1)^{k-1}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}(-4x)^k \\ &= -2\frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}x^k\end{aligned}$$

となる。よって

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

の x^k の係数は分子の x^{k+1} の係数だから、

$$\frac{1}{2} \times 2\frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$$

となる。このことから、

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

であることがわかる。

参考文献は以下の通り。

1. カタラン数山上 滋
   http://sss.sci.ibaraki.ac.jp/teaching/catalan.pdf
2. カタラン数の語る数学の世界-Enumerative Combinatorics 入門
   寺尾　宏明 http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/ terao/hokudaihs.pdf