大人のための高校数学 2B

梅崎直也

2021 年 3 月 16 日

目次

第 1 章

方程式と不等式

1.1 多項式の割り算と剰余定理

ここではまず多項式の掛け算や割り算について扱う。多項式の掛け算は要するに次のような式の展開だが、これは筆算を使って計算できる。

例 1.1.1.

$$(x^3+2x^2-x+1)(x^2-2x-2)=x^5-7x^3-x^2-2$$

という計算を筆算を用いて行うと

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & +2x^2 & -x & +1 \\
\times & & & x^2 & -2x & -2 \\
\hline
 & & -2x^3 & -4x^2 & +2x & -2 \\
 & -2x^4 & -4x^3 & +2x^2 & -2x & \\
x^5 & +2x^4 & -x^3 & +x^2 & & \\
\hline
x^5 & & -7x^3 & -x^2 & & -2
\end{array}$$

となる。

これと同じように多項式についてあまりのある割り算も筆算を用いて行うことができる。

例 1.1.2. 多項式 x^4+2x^2-x+1 を x^2-3x+1 で割った商とあまりを求めよ。

$$\begin{array}{rrrr|rrrrr}
 & & & & x^2 & +3x & +10 & & \\
\cline{5-9}
x^2 & -3x & +1 &) & x^4 & & +2x^2 & -x & +1 \\
 & & & & x^4 & -3x^3 & +x^2 & & \\
\cline{5-9}
 & & & & & 3x^3 & x^2 & -x & \\
 & & & & & 3x^3 & -9x^2 & +3x & \\
\cline{5-9}
 & & & & & & 10x^2 & -4x & +1 \\
 & & & & & & 10x^2 & -30x & +10 \\
\cline{5-9}
 & & & & & & & 26x & -9
\end{array}$$

となるので、商は $x^2+3x+10$ であまりは $26x-9$ である。

問題 1.1.3. 次の多項式の割り算をし、商とあまりを求めよ。

1. $x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ を $x + 1$ で割る。
2. $x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ を $x^2 + x - 1$ で割る。
3. $x^4 - 2x^2 + 2$ を $x^2 + x + 1$ で割る。

解答.
1. 商は $x^2 + 2x + 1$ であまりが 2
2. 商は $x^2 + 2x - 1$ であまりが $5x$
3. 商は $x^2 - x - 2$ であまりが $3x + 4$

上のように多項式の割り算を行うことができるが特に一次式 $x - a$ で割り算を行った場合、そのあまりは定数となる。この**余りのみ**を知りたい場合には、次のような計算が有用である。

定理 1.1.4 (剰余定理)**.** 多項式 $f(x)$ を $x - a$ で割ったあまりは $f(a)$ となる。

例 1.1.5. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ を $x - 2$ で割った余りは

$$f(2) = 2^3 + 2 \times 2^2 + 2 - 3 = 15$$

である。

実際に割り算をしてみると、

$$\begin{array}{rr|rrrr}
 & & & x^2 & +4x & +9 \\ \cline{3-6}
x & -2 & x^3 & +2x^2 & +x & -3 \\
 & & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & 4x^2 & +x & \\
 & & & 4x^2 & -8x & \\ \cline{3-6}
 & & & & 9x & -3 \\
 & & & & 9x & -18 \\ \cline{3-6}
 & & & & & 15
\end{array}$$

となる。

問題 1.1.6. 次の多項式 $f(x)$ を与えられた一次式で割った余りを求めよ。

1. $f(x) = x^3 + 1, x - 3$
2. $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - x + 1, x - 2$
3. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1, x - 1$

解答.
1. 28
2. 19
3. 0

問題 1.1.7. 次の多項式 $f(x)$ を $x - a$ で割った余りが 0 となるような整数 a を全て求めよ。

1. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
2. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
4. $f(x) = x^3 - 1$

解答. 1. $2, 3$
2. -2
3. $1, 2, 3$
4. 1

では剰余定理を証明しよう。

証明. $f(x)$ を $(x-a)$ で割った余りを r とする。つまり、

$$f(x) = (x-a)q(x) + r$$

となる。この式の両辺に $x = a$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)q(a) + r \\ &= 0 \times q(a) + r \\ &= r \end{aligned}$$

となる。つまり $r = f(a)$ である。 □

余りだけを知りたい、という状況があるのか？ということが気になるかもしれないが、これは次のような因数分解の問題を考えるときに役立つ。因数分解をするときには、どんな式で割り切れるか？を考える必要があるが、余りが 0 かどうかを実際に割り算する前に確かめることができれば効率がよい。

例 1.1.8. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x - 8$ を有理数の範囲で因数分解する。一次式 $x - a$ でこの式を割り切るものを探そう。a を適当に考えて $f(a) = 0$ となるものを探す。例えば

$$\begin{aligned} f(0) &= -8 \\ f(1) &= 1 - 3 - 12 - 8 = -22 \\ f(-1) &= -1 - 3 + 12 - 8 = 0 \end{aligned}$$

となるので、$x - (-1) = x + 1$ で割り切れることがわかる。実際に割り算を行うと。

$$x^3 - 3x^2 - 12x - 8 = (x+1)(x^2 - 4x - 8)$$

となる。$x^2 - 4x - 8$ はこれ以上有理数の範囲で因数分解できないので、これが結果である。

問題 1.1.9. 次の多項式を有理数の範囲で因数分解せよ。

1. $f(x) = x^3 - 7x - 6$

2. $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18$
3. $f(x) = x^3 - 1$
4. $f(x) = x^4 - 1$

解答.
1. $x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)$
2. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 18 = (x-2)(x+3)(x^2+2x+3)$
3. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
4. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

特にこのことを利用して高次の方程式を解くことができる場合がある。[*1]

例 1.1.10. x についての方程式

$$x^3 - 3x^2 - 12x - 8 = 0$$

を実数の範囲で解こう。

上で見たようにこの式は

$$(x+1)(x^2 - 4x - 8) = 0$$

と因数分解できる。したがって、

$$x = -1 \text{ または } x^2 - 4x - 8 = 0$$

となる。後者については解の公式を用いると

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

が解となるから、全て合わせて

$$x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$$

が元の方程式の解である。

問題 1.1.11. 次の x についての方程式を実数の範囲で解け。

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
2. $x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0$
3. $x^3 - 1 = 0$

解答.
1. $x = 1, -1, -2$

[*1] 実際には話が逆で、方程式を解くということは x にどのような値を代入すれば 0 になるかを考えるということだから、剰余定理を応用して方程式を解く、という説明はちょっとおかしい。

2. $x = -1, \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$
3. $x = 1$

必ずしもどんな方程式でもこの方法で解くことができるとは限らない。二次方程式の場合でも、因数分解を用いて（有理数の範囲で）解ける時と解の公式を使って無理数を導入しなければならない場合があった。では三次方程式の場合に解の公式が存在するか？これについて議論するためには次に説明する複素数を用いる必要がある。

1.2　複素数

ここでは新しく複素数という数を導入する。これまでにも、自然数から整数や有理数、そして実数へと新しい数を導入してきた。そのおかげで、足し算引き算、掛け算割り算が可能になり、また色々な方程式が解けたり円などの図形の面積を表したりなどということができるようになった。

ここでさらに複素数を導入することでできるようになることとして、この時点で簡単に述べることができるのは、

1. 二次方程式が全て解けるようになる。(さらに高次の方程式も解けるようになる。)
2. 回転という操作を数で表すことができるようになる。

の二つある。

これができるようになると何が嬉しいのか？ということにこの時点で明確に答えることは難しい。ただ、あらゆる方程式が解けることで物事を簡単な場合に帰着することが可能になり、回転を表現することで三角関数の持つ意味がより明確になる、ということが言える。

そのあたりの事情はいずれ勉強してもらうことにして、ここではひとまず複素数という新しい数の計算の仕方に慣れてもらい、それを図で表現する方法について簡単に紹介しよう。

1.2.1　複素数の四則演算

複素数は実数 a, b を用いて $a + bi$ と表すことができる数である。ここで i というのは実数とは違う新たな記号で、$i^2 = -1$ と計算できるもの。例えば平方根の話をする時に $\sqrt{2}$ という記号を導入し、$\sqrt{2}^2 = 2$ であると約束したのと同様である。この意味では $\sqrt{-1}$ という表し方もよく使われるが、ここでは i を用いることにしよう。

二つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ が一致するのは $a = c$ かつ $b = d$ であることが必要十分条件である。まずは複素数の四則演算について確認しよう。

例 1.2.1.
1. $(3 + 5i) + (2 - 4i) = (3 + 2) + (5 - 4)i = 5 + i$
2. $(2 - 3i) - (4 - i) = (2 - 4) + (-3 - (-1))i = -2i - 2i$
3. $(2 + i)(3 + 2i) = 6 + 3i + 4i + 2i^1 = 6 + 3i + 4i - 2 = 4 + 7i$

4.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{2-i} &= \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}\\ &= \frac{2+2i+i+i^2}{4-i^2}\\ &= \frac{1+3i}{5}\\ &= \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\end{aligned}$$

このように通常の x の文字式と同様に計算すればよいが、特に掛け算の時に $i^2=-1$ となることに注意しよう。

問題 1.2.2. 次の複素数を計算し $a+bi$ の形に表せ。

1. $3+2i+5-3i$
2. $(2+i)(3-2i)$
3. $\dfrac{1}{1+3i}$
4. $\dfrac{1-i}{2+3i}$

解答.

1. $8-i$
2. $8-i$
3. $\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$
4. $-\dfrac{1}{13}-\dfrac{5}{13}i$

これまで二次方程式にうちで解を持たないものがあった。ここでは正確には、実数解を持たないものというべきである。実際に解の公式を用いることで、複素数まで広げると全ての二次方程式が解を持つことがわかる。

例 1.2.3. 二次方程式

$$x^2+x+3=0$$

を解く。解の公式を用いると

$$\begin{aligned}x &= \frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}\\ &= \frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}\end{aligned}$$

となる。

問題 1.2.4. 次の x についての方程式を複素数の範囲で解け。

1. $x^2 - x + 2 = 0$
2. $x^2 + 2x + 5 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$

解答.
1. $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$
2. $x = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$
3. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

上で実数係数の方程式が複素数解を持つとき、$a + bi, a - bi$ という二つのペアに必ずなっていることに注目しよう。このように、$a + bi, a - bi$ という複素数のペアのことを**共役複素数**という。つまり、$a + bi$ の共役が $a - bi$ であり、$a - bi$ の共役が $a + bi$ である。

例えば $x^2 = 2$ の解が $\pm\sqrt{2}$ となるが、この二つの一方は正であり他方は負であるという意味で明確に区別が可能なものである。ところが、$x^2 = -1$ の解が $\pm i$ となるこの二つの解を区別する方法はない。ある意味ではこの共役という概念は複素数の対称性を表現するものであると言える。

1.2.2　多項式による剰余との関係

実数を係数に持つ多項式 $f(x)$ を $x^2 + 1$ で割ることを考える。これによるあまりは一次式なので $a + bx$ と表すことができる。

さて、$1 + x$ と $1 + 2x$ を掛けてできる二次式を $x^2 + 1$ で割ったあまりがどうなるか計算しよう。まず $(1+x)(1+2x) = 1+3x+2x^2$ である。次に x^2+1 で割ると $1+3x+2x^2 = 2(x^2+1)+3x-1$ となり、あまりは $-1 + 3x$ である。

ところで、$(1 + i)(1 + 2i) = 1 + i + 2i - 2 = -1 + 3i$ である。この二つを比較すると $x^2 + 1$ で割った余りによりある種の合同式のようなものを考えることで、複素数と全く同じような計算ができることがわかる。

1.2.3　1 の 3 乗根

さて、1 の 3 乗根について調べよう。つまり、$x^3 = 1$ という方程式の解を求める。

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \\ x &= 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

の三つ。

これに特別な名前をつけて

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

と呼ぶ。

問題 1.2.5. 次の複素数を計算せよ。

1. ω^2
2. $\omega^2 + \omega + 1$
3. ω^3
4. ω^{100}

解答.

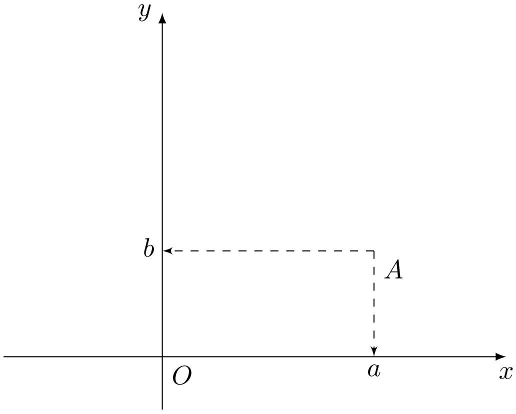
1. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. 0
3. 1
4. $\omega^{100} = (\omega^3)^{33} \times \omega = 1^{3}3 \times \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1.2.4　複素数平面

実数全体は数直線と対応していると考えることができた。これと同様なことが複素数で可能かどうかを考える。

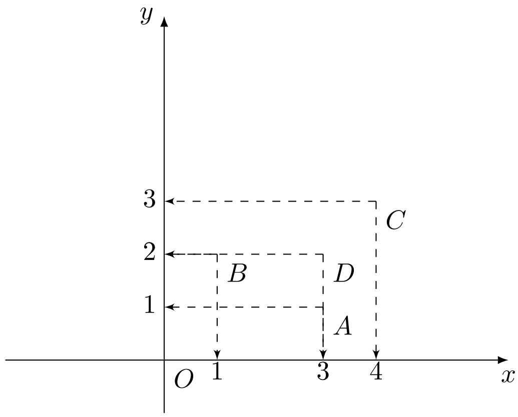
複素数は $a + bi$ と実数 a, b 二つの組で指定できる。このことと、xy 座標平面の点 (x, y) が実数 x, y 二つの組で指定できることを対応させると、複素数 $a + bi$ に対して、xy 座標平面の点 (a, b) を対応させることで、複素数全体が座標平面と対応していると考えることができる。このように複素数を平面上の点とみなしてできる平面のことを**複素数平面**という。

つまり $a+bi$ に対応する点 A は次のようになる。

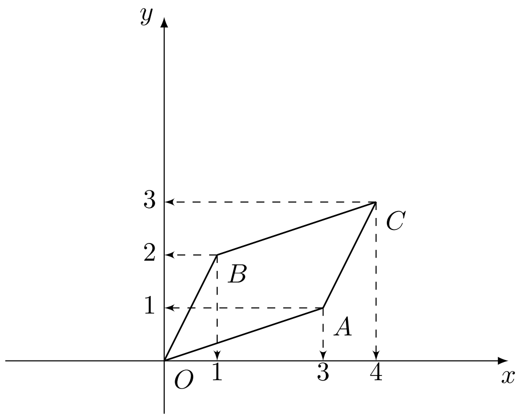


問題 1.2.6. $3 + i, 1 + 2i, 4 + 3i, 3 + 2i$ に対応する点を順に A, B, C, D とし、これらを複素数平面に図示せよ。

解答.

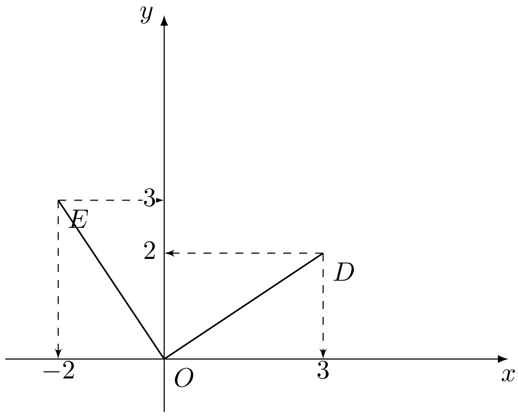


この複素数平面において、足し算は次のように理解できる。例えば $(3+i)+(1+2i)=4+3i$ であり、これを複素数平面で表すと



のようになり、$ABCO$ が平行四辺形となることがわかる。

また、$i(3+2i)=3i-2$ でありこれを複素数平面で表すと



のようになり、i 倍が $90°$ 回転であるであることがわかる。

1.2.5 複素数の絶対値と偏角

複素数 $a+bi$ に対してその**絶対値**を $\sqrt{a^2+b^2}$ で定める。これは $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ である、つまり自分自身と共役複素数の積の平方根である。また、複素数平面で言えば、$a+bi$ が表す点 (a,b) と原点の間の長さである。三平方の定理を思い出そう。

また、θ を**偏角**という。これを明示的に a,b の式で表すことは難しいが、次のような関係が成り立つ。

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

問題 1.2.7. 1 の 3 乗根を $\omega = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ で表す。この時、以下の複素数の絶対値と偏角を求めよ。

1. ω
2. ω^2
3. $-\omega^2$
4. $i\omega$

解答. 全て絶対値は 1 である。偏角は

1. $120°$

2. 240°
3. 60°
4. 210°

問題 1.2.8. 公式

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

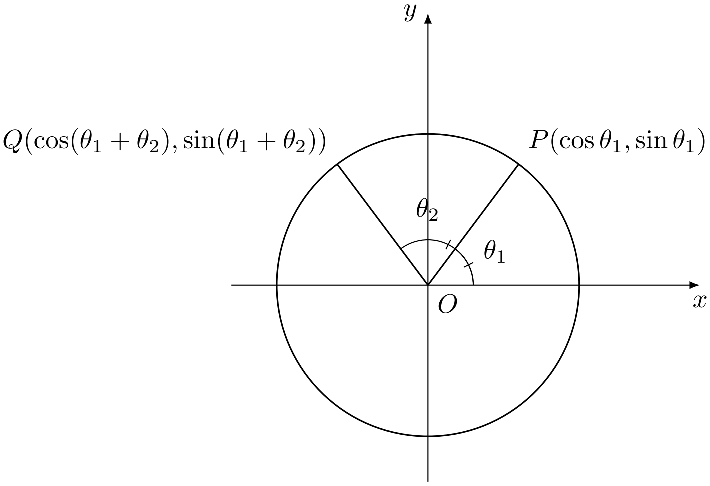
を以下の手順に従って証明しよう。

示すべき式を変形して

$$\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}$$

を証明することにしよう。

1. これの右辺の分母を実数化し、その実部と虚部を $\sin\theta_1, \cos\theta_1, \sin(\theta_1+\theta_2), \cos(\theta_1+\theta_2)$ の式で表せ。
   この計算結果の実部が $\cos\theta_2$、虚部が $\sin\theta_2$ にそれぞれ一致することを示せばよい。
2. 単位円上に、図のように角が θ_1 になる点を P とし、$\theta_1+\theta_2$ になる点を Q とする。



   このとき、$\angle QOP = \theta_2$ であることに注意して、$\triangle POQ$ で余弦定理の式を立てよ。
3. 三平方の定理を用いて PQ^2 を $\cos\theta_1, \cos(\theta_1+\theta_2), \sin\theta_1, \sin(\theta_1+\theta_2)$ の式で表せ。
4. 以上により

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1$$

   が証明できたことを確認せよ。
5. 上の式で θ_2 を $\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}$ と置き換えることで、

$$\sin\theta_2 = \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1$$

を証明せよ。

解答 1.2.9. 公式

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

を以下の手順に従って証明しよう。

示すべき式を変形して

$$\cos\theta_2 + i\sin\theta_2 = \frac{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}$$

を証明することにしよう。

1. これの右辺の分母を実数化し、その実部と虚部を $\sin\theta_1, \cos\theta_1, \sin(\theta_1+\theta_2), \cos(\theta_1+\theta_2)$ の式で表せ。

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)}{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1} \\
&= \frac{(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)} \\
&= \frac{(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)}{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} \\
&= (\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) \\
&= (\cos(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1) \\
&+ (\sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1)i
\end{aligned}$$

この計算結果の実部が $\cos\theta_2$、虚部が $\sin\theta_2$ にそれぞれ一致することを示せばよい。したがって、

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= \cos(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1 \\
\sin\theta_2 &= \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1
\end{aligned}$$

を証明すればよいことになる。

2. 単位円上に、図のように角が θ_1 になる点を P とし、$\theta_1+\theta_2$ になる点を Q とする。このとき、$\angle QOP = \theta_2$ であることに注意して、$\triangle POQ$ で余弦定理の式を立てると

$$\cos\theta_2 = \frac{1+1-PQ^2}{2}$$

このとき、$\angle QOP = \theta_2$ であることに注意して、$\triangle POQ$ で余弦定理の式を立てると

$$\cos\theta_2 = \frac{1+1-PQ^2}{2}$$

3. 三平方の定理を用いると

$$\begin{aligned}
PQ^2 &= (\cos(\theta_1+\theta_2) - \cos\theta_1)^2 + (\sin(\theta_1+\theta_2) - \sin\theta_1)^2 \\
&= 2 - 2\cos(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 - 2\sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1
\end{aligned}$$

4. よって

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1$$

5. 上の式で θ_2 を $\theta_2 + \dfrac{\pi}{2}$ と置き換えることで、

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) &= \sin\theta \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) &= -\cos\theta \end{aligned}$$

であることから、

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) &= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi}{2})\cos\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi}{2})\sin\theta_1 \\ \sin\theta_2 &= \sin(\theta_1+\theta_2)\cos\theta_1 - \cos(\theta_1+\theta_2)\sin\theta_1 \end{aligned}$$

が証明できる。

1.2.6　3 次方程式の解の公式

以下では 3 次方程式の解の公式について求める方針を簡単に説明するが、これらは難しい上に実用性はほぼないので、特に理解する必要はない。

方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

の解を $x = \alpha, \beta, \gamma$ としよう。

このとき、

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

となることから、次のような関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= b \\ \alpha\beta\gamma &= -c \end{aligned}$$

解の公式を導くためのアイディアは次の式を a,b,c で表すことである。

$$\begin{aligned} L_1 &= \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma \\ L_2 &= \alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma \end{aligned}$$

ここで、$\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であり、$\omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1$ となる。

さて $L_1^3+L_2^3, L_1^3L_2^3$ を計算してみると、これらが a,b,c を用いて表すことができることがわかる。ただし計算はかなり大変である。

$$
\begin{aligned}
L_1^3+L_2^3 &= (\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3+(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3 \\
L_1^3L_2^3 &= (\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)^3(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)^3
\end{aligned}
$$

ところで、L_1^3, L_2^3 はこれを解に持つ二次方程式が a,b,c を係数として記述できる。二次方程式の解の公式を用いることで L_1^3, L_2^3 は a,b,c を用いて表すことができる。したがって、L_1, L_2 が a,b,c を用いて表せることになり、連立方程式

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma \\
L_2 &= \alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma \\
-a &= \alpha+\beta+\gamma
\end{aligned}
$$

を解くことで、α,β,γ を a,b,c を用いて表すことができる。

1.3　不等式

ここではいくつかの不等式の証明について扱う。変数の動く範囲は特別に指定がない限り実数全体とする。場合によっては正の数全体や 0 以上の数全体などになったりする。

不等式を証明する上で重要な事実は両辺に同じ数や式を足したり引いたり、あるいは正の数を掛けたり割ったりしても不等式は変わらないこと、さらに次の事実が重要である。

命題 1.3.1. x を実数とする。このとき、

$$x^2 \geq 0$$

であり、等号が成立するのは $x = 0$ であることが必要十分条件である。

このことと平方完成を合わせると、例えば次のような不等式を証明できる。

例 1.3.2. x が実数のとき、

$$x^2 + 2x + 2 \geq 0$$

であることを証明しよう。

式の左辺を平方完成すると

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

である。$x + 1$ は実数だから、$(x+1)^2 \geq 0$ であり、この両辺に 1 を足すことで

$$(x+1)^2 + 1 \geqq 1 \geq 0$$

となることが証明できる。

一般には両辺共に文字式である不等式を証明することもあるが、そのような時には左辺と右辺の差についての不等式に直した方が証明しやすいことも多い。

例 1.3.3. x, y が実数のとき、

$$x^2 \geq 2xy - y^2$$

であることを証明しよう。

示すべき式の左辺と右辺の差を取ることで、

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

であることを示せばよい。改めてこの式の左辺を平方完成すると

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

であり、$x-y$ は実数だから

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$$

であることが示された。

問題 1.3.4. x,y,z が実数のとき次の不等式を示せ。

1. $x^2+x+1\geq 0$
2. $x^2+2xy+2y^2\geq 0$
3. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\geq 0$

解答. 1. 左辺を平方完成すると、

$$\begin{aligned}x^2+x+1&=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1\\&=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

であり、$x+\dfrac{1}{2}$ が実数であるので、

$$\begin{aligned}x^2+x+1&=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\\&\geq\frac{3}{4}\geq 0\end{aligned}$$

2. 左辺を平方完成すると、

$$\begin{aligned}x^2+2xy+2y^2&=(x+y)^2-y^2+2y^2\\&=(x+y)^2+y^2\end{aligned}$$

であり、$x+y,y$ が実数なので $(x+y)^2\geq 0,y^2\geq 0$ であるから

$$\begin{aligned}x^2+2xy+2y^2&=(x+y)^2+y^2\\&\geq 0+0=0\end{aligned}$$

3. 左辺を平方完成すると、

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx&=x^2+(y+z)x+y^2+z^2+yz\\&=(x+\frac{y+z}{2})^2-\frac{(y+z)^2}{4}+y^2+z^2+yz\\&=(x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{1}{4}(3y^2+2yz+3z^2)\\&=(x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{1}{4}(3(y+\frac{1}{3}z)^2-\frac{1}{3}z^2+3z^2)\\&=(x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{2}{3}z^2\end{aligned}$$

となる。$x+\frac{y+z}{2}, y+\frac{1}{3}z, z$ がそれぞれ実数なので

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx &= (x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{3}{4}(y+\frac{1}{3}z)^2+\frac{2}{3}z^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となる。

やや技巧的だが次のようにも証明できる。

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx &= \frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx) \\ &= \frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

問題 1.3.5. a, b, c, x, y, z を実数とする。以下の不等式を示せ。また、等号が成立するための条件を求めよ。

1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

解答.

1. 左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 &= a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2axby+b^2y^2) \\ &= a^2y^2+b^2x^2-2axby \\ &= (ay-bx)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となるので、与えられた不等式は示された。

等号が成立するのは $ay-bx=0$ であることが必要十分条件。

2. 左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} &(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \\ &= a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-(a^2x^2+2axby+b^2y^2+2axcz+ \\ &= a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2-2axby-2axcz-2bycz \\ &= (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

となるので、与えられた不等式は示された。

等号が成立するのは $ay-bx=az-cx=bz-cy=0$ であることが必要十分条件。

x や y に条件がついた場合の不等式は、その条件をどう使うのかを明確に把握するようにしよう。

例 1.3.6. $x>y>0$ のとき

$$\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$$

であることを示そう。

$1+x>0, 1+y>0$ なので、両辺にこれらをかけると

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x}(1+x)(1+y) &> \frac{y}{1+y}(1+x)(1+y)\\ x(1+y) &> y(1+x)\end{aligned}$$

を示せばよいことになる。

ここで左辺から右辺を引くと

$$x(1+y)-y(1+x)=x-y$$

となり、$x>y$ と仮定されていることから $x-y>0$ である。以上より

$$\frac{x}{1+x}>\frac{y}{1+y}$$

であることが示された。

問題 1.3.7. $a>b, x>y$ のとき

$$(a+2b)(x+2y)<3(ax+2by)$$

であることを示せ。

解答. 左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned}(a+2b)(x+2y)-3(ax+2by) &= ax+2bx+2ay+4by-3ax-6by\\ &= -2ax+2bx+2ay-2by\\ &= 2x(b-a)-2y(b-a)\\ &= 2(x-y)(b-a)\end{aligned}$$

となる。ここで仮定 $a>b, x>y$ より $x-y>0, b-a<0$ なので

$$(x-y)(a-b)<0$$

となり、

$$(a+2b)(x+2y)<3(ax+2by)$$

が示された。

$\sqrt{}$ の入った不等式を証明するには、両辺の二乗を計算することが多い。ただしこれには注意が必要である。

$a<b$ ならば $a^2<b^2$ であることも、$a^2<b^2$ ならば $a<b$ であることもどちらも正しくない。$0<a, 0<b$ という条件のもとで $a<b$ と $a^2<b^2$ は同値になる。

例 1.3.8. $a > 0, b > 0$ のとき、$\sqrt{9a+16b} < 3\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$ を証明しよう。

$$\begin{aligned} \text{右辺}^2 - \text{左辺}^2 &= 9a + 24\sqrt{ab} + 16b - (9a + 16b) \\ &= 24\sqrt{ab} \end{aligned}$$

であり、$a > 0, b > 0$ であるので 左辺^2 $<$ 右辺^2 である。ここで $\sqrt{9a+16b} \geq 0, 3\sqrt{a} + 4\sqrt{b} \geq 0$ であるので、左辺 $<$ 右辺 である。

問題 1.3.9. $a > b > 0$ のとき、$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}$ を証明せよ。

解答.

$$\begin{aligned} \text{右辺}^2 - \text{左辺}^2 &= (a - b) - (a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= 2\sqrt{ab} - 2b \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \end{aligned}$$

である。ここで、$a > b > 0$ より $\sqrt{a} > \sqrt{b} > 0$ だから、左辺^2 $<$ 右辺^2 である。さらに、$\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0, \sqrt{a-b} > 0$ より 左辺 $<$ 右辺 となる。

1.3.1　相加平均と相乗平均

相加平均と相乗平均の不等式と呼ばれる次のような不等式を紹介しよう。

定理 1.3.10. 実数 $a > 0, b > 0$ に対して

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つ。また、この不等式において等号が成立することは $a = b$ であるための必要十分条件である。

問題 1.3.11. 上の不等式を証明せよ。

解答. 両辺共に正なので、二乗して示せば良い。つまり

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

を証明する。左辺から右辺を引くと

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2}{4} - ab &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \end{aligned}$$

となる。これは 0 以上であり、0 となるには $a=b$ であることが必要十分条件。

これを使うと、次のような不等式を証明できる。

例 1.3.12. $a>0, b>0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明しよう。

$$a+\frac{9}{a}\geq 6$$

仮定より $a\geq 0, \dfrac{9}{a}\geq 0$ であるので、相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{1}{2}(a+\frac{9}{a})\geq\sqrt{a\times\frac{9}{a}}=3$$

である。よって $a+\dfrac{9}{a}\geq 6$ となる。

問題 1.3.13. $a>0, b>0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

1. $\dfrac{3b}{2a}+\dfrac{2a}{3b}\geq 2$
2. $\dfrac{2}{a+b}+2a+2b\geq 4$
3. $(a+2b)(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b})\geq 8$

解答.

1. 仮定より $\dfrac{3b}{2a}\geq 0, \dfrac{2a}{3b}\geq 0$ であるので、相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{1}{2}(\frac{3b}{2a}+\frac{2a}{3b})\geq\sqrt{\frac{3b}{2a}\times\frac{2a}{3b}}=1$$

である。よって $\dfrac{3b}{2a}+\dfrac{2a}{3b}\geq 2$ となる。

2. 仮定より $2a+2b\geq 0, \dfrac{2}{a+b}\geq 0$ であるので、相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{1}{2}(2a+2b+\frac{2}{a+b})\geq\sqrt{(2a+2b)\times\frac{2}{a+b}}=2$$

である。よって $\dfrac{2}{a+b}+2a+2b\geq 4$ となる。

3.

$$\begin{aligned}\text{左辺}-\text{右辺}&=2+\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}+2-8\\&=\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}-4\end{aligned}$$

である。ここで、仮定より $\dfrac{a}{b}\geq 0, 4\dfrac{b}{a}\geq 0$ であるので、相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+4\frac{b}{a})\geq\sqrt{\frac{a}{b}\times 4\frac{b}{a}}=2$$

であり、したがって $\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}\geq 4$ となる。よって

$$\text{左辺}-\text{右辺}=\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}\geq 0$$

であり、左辺 $\geq$ 右辺 が示された。

また、相加平均と相乗平均の不等式を用いることで、次のような式の値の取る範囲を調べることができる。

例 1.3.14. $x>0$ のとき、

$$x+\frac{16}{x+2}$$

の最小値を求めよう。

次のように式変形をおこなう。

$$x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$$

ここで、$x+2>0$ なので相加平均と相乗平均の関係から、

$$x+2+\frac{16}{x+2}\geq 2\sqrt{(x+2)\frac{16}{x+2}}=8$$

であり、また $x+2=\frac{16}{x+2}$ のとき等号が成り立つ。$x+2=\frac{16}{x+2}$ をとくと、$x>0$ に注意して $x=2$ であり、これが等号の条件である。よって、$x=2$ のとき最小値 6 となる。

注意したいのは、最大値や最小値であることを述べるには、そのような値をとることまで述べる必要がある。単に不等式が成立して範囲が決まることとは区別しよう。例えば $x^2+1\geq 0$ であるが、x^2+1 の最小値は 1 である。

問題 1.3.15. $x>0, y>0$ のとき、

$$(x+\frac{2}{y})(y+\frac{3}{x})$$

の最小値を求めよ。

解答. 式を展開すると、

$$\begin{aligned}(x+\frac{2}{y})(y+\frac{3}{x})&=xy+2+3+\frac{6}{xy}\\&=xy+\frac{6}{xy}+5\end{aligned}$$

となる。ここで、$xy > 0$ なので、相加平均相乗平均の関係から

$$xy + \frac{6}{xy} \geq 2\sqrt{xy\frac{6}{xy}} = 2\sqrt{6}$$

であり、$xy = \dfrac{6}{xy}$ すなわち $x^2y^2 = 6$ のとき等号が成立する。$x > 0, y > 0$ のときに例えば $x = 1, y = \sqrt{6}$ が等号を満たすので、このとき、最小値 $2\sqrt{6} + 5$ となる。

1.3.2　コーシーシュワルツの不等式

コーシーシュワルツの不等式と呼ばれる有名な不等式があるので、それを紹介しよう。前の問題でみたように a, b, c, x, y, z を実数とすると

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$
$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

という不等式が成立していた。実はこの不等式は次のように一般化できる。

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2$$

等号成立条件は

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

である。

この不等式の証明は、前の問題と同じように全て展開することでも可能だが、かなり煩雑になる。そこで、ここでは二次方程式の解の存在に結びつけるといううまい証明方法を紹介する。

証明. 次のような t についての二次方程式を考えよう。

$$(a_1^2 + a_x^2 + \cdots + a_n^2)t^2 + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)t + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 0$$

この式の左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned}&(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)t^2 + 2(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)t + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\\&= a_1^2t^2 + 2a_1x_1t + x_1^2 + a_2^2t^2 + a_2x_2t + x_2^2 + \cdots + a_n^2t^2 + 2a_nx_nt + x_n^2\\&= (a_1t + x_1)^2 + (a_2t + x_2)^2 + \cdots + (a_nt + x_n)^2\end{aligned}$$

このように変形すると、この式を 0 にする t は

$$t = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

のみであり、特に重解である。

さて、初めの二次方程式の判別式は

$$4(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

であり、二次方程式が重解を持つときこれは 0 であり、また実数解を持たないとき < 0 となる。

したがって

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

のとき、重解を持ち

$$4(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) = 0$$

となる。また、上の条件を満たさないときは実数解が存在しないので、

$$4(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) < 0$$

となり、これが示したい不等式であった。 □

この不等式は後で出てくるベクトルの内積と結びつけて理解することができる。

また、統計を知ってる人向けだが、統計に出てくる量として相関係数というものがある。二つの変数の関係性を測る一つの指標である。この相関係数は -1 以上 1 以下になることが知られているが、このことの一つの証明としてコーシーシュワルツの不等式を用いることが駅る。