有向点列の収束による位相空間論

片岡佑太
すうがくぶんか

本講座では、有向点列の収束を用いた位相空間論について解説します。有向点列とは、単純に述べれば点列を一般化した概念です。距離空間においては、例えば、集合の閉包、連続性、コンパクト性などは、点列の収束を用いて直感的に表現できました。一般の位相空間において、この距離空間における点列の役割と全く同等の役割を果たすのが、有向点列です。

無限次元の空間（関数空間やその上の作用素や汎関数の空間）を扱う関数解析においては、距離位相だけでなく、セミノルム位相や汎弱位相（例えば各点収束位相や広義一様収束位相、作用素強位相、作用素弱位相）など様々な位相を取り扱いますが、どの位相空間においても通用する一定の収束の議論は、理論を統一的に見通す上で非常に役に立ちます。位相的性質が点列の収束により十分に表現できる距離空間などは、ある種の可算性を持っています。位相空間がどの可算性を持てば、位相的性質を点列によって表現できるのかについてもお話します。また、有向点列の収束の概念は、直積位相を非常に簡明に特徴付け、チコノフの定理 (コンパクト空間の任意の直積はコンパクト) などある種の命題の証明をほとんど自明化してしまいます。この様な内容についてもお話します。チコノフの定理は例えばハール測度の存在証明など、関数解析の基本定理の証明で使います。

目次

1 ツォルンの補題と普遍部分有向点列の存在

1.1 集合の順序

定義 1.1 (順序集合)**.** X を空でない集合とします。X における二項関係 $\leqslant$ が次の満たすとき、$\leqslant$ を X の**順序**（**order**）と呼びます。

(1) **反射律**　任意の $x \in X$ に対し $x \leqslant x$.
(2) **推移律**　$x \leqslant y$ かつ $y \leqslant z$ を満たす任意の $x, y, z \in X$ に対し $x \leqslant z$.
(3) **反対称律**　$x \leqslant y$ かつ $y \leqslant x$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対し $x = y$.

さらに X 上の順序 $\leqslant$ が次を満たすとき $\leqslant$ を**全順序**（**total order**）と呼びます。

(4) **全順序性**　任意の $x, y \in X$ に対し $x \leqslant y$ か $y \leqslant x$ のうち少なくとも一方は成り立つ。

$x \leqslant y$ であることは $y \geqslant x$ とも表します。また $x \leqslant y$ かつ $x \neq y$ であることを $x < y$ または $y > x$ と表します。
順序 $\leqslant$ が定められている集合を**順序集合**と言います。

例 1.2. 自然数全体 $\mathbb{N}$、整数全体 $\mathbb{Z}$、実数全体 $\mathbb{R}$ などの通常の順序は全順序です。

例 1.3 (集合の包含関係、逆包含関係による順序)**.** X を集合、2^X を X の部分集合全体からなる集合とします。任意の $A, B \in 2^X$ に対し、

$$A \leqslant_{\text{inc.}} B \overset{\text{定義}}{\iff} A \subseteq B$$

とおくと $\leqslant_{\text{inc}}$ は 2^X 上の順序となります。この順序を**包含関係による順序**と呼びます。また $A, B \in 2^X$ に対し、

$$A \leqslant_{\text{rev.inc.}} B \overset{\text{定義}}{\iff} A \supseteq B$$

とおくと $\leqslant_{\text{rev.inc.}}$ も 2^X 上の順序となります。この順序を**逆包含関係による順序**と呼びます。しかし包含関係による順序、逆包含関係による順序はいずれも一般に全順序ではありません。

定義 1.4 (上界、下界、上に有界、下に有界)**.** X を順序集合とします。$A \subseteq X, A \neq \varnothing$ とします。

- $x \in X$ が A の**上界**であるとは、任意の $a \in A$ に対し $a \leqslant x$ が成り立つことを言います。
- $x \in X$ が A の**下界**であるとは、任意の $a \in A$ に対し $x \leqslant a$ が成り立つことを言います。

上界、下界は存在するとは限りませんが、

- A の上界が存在するとき、A は**上に有界**であると言います。
- A の下界が存在するとき、A は**下に有界**であると言います。

定義 1.5 (最大元、最小元)**.** X を順序集合、$A \subseteq X, A \neq \varnothing$ とします。

- A の上界で A に属するものを A の**最大元**と言います。
- A の下界で A に属するものを A の**最小元**と言います。

順序の反対称律により、**最大元、最小元はそれぞれ存在するならば一意的に決まります。**

1.2 選択公理からのツォルンの補題の証明

有向点列の収束による位相空間の諸性質の特徴付けの証明において、**有向点列が普遍部分有向点列という、非常に性質の良い、部分有向点列を持つこと**が鍵になります。それを証明するために**ツォルンの補題**が必要です。ツォルンの補題は関数解析の多くの重要な存在定理（例えばハーン-バナッハの拡張定理など）の証明にも使われる非常に重要な命題でもあり、ここで述べておくこととします。