

群論入門と有限群の分類

2021年1月9日

1 はじめに

この講座では有限群の分類問題を目標に群論の入門を行います。

整数全体のなす集合 \mathbb{Z}

有理数全体のなす集合 \mathbb{Q}

実数全体のなす集合 \mathbb{R}

複素数全体のなす集合 \mathbb{C}

また、これらの右肩に*がついた場合は元の集合から0を除いた集合を表すことにします。

2 群の紹介

2.1 最初の例

まず、対称性をキーワードに群の概念を紹介します。

問 2.1 二等辺三角形 (正三角形でない) と正三角形の対称性について考えてみましょう。

一般に X を X にぴったり重ねる変換を自己同型とよび、自己同型全体の集合を $Aut(X)$ と表します。何もしない変換も自己同型のひとつと考えることに注意してください。 X の対称性の研究とは $Aut(X)$ の研究に他なりません。 $Aut(\text{正三角形})$ は $Aut(\text{二等辺三角形})$ より多くの要素を持つ集合です。このことから正三角形は二等辺三角形 (正三角形でない) よりも対称性が高い図形だといえます。

問 2.2 正四面体、正六角柱、正十二角錐の自己同型をすべて列挙してみましょう。

どの場合も12個の自己同型をもちます。

問 2.3 上の3つの図形は同じ対称性をもつのでしょうか？

$Aut(X)$ の研究は要素の個数を調べるだけでは足りないということになります。

2.2 演算

2つの自己同型 f, g があるとき、「 f で変換してから g で変換する」という変換はまた自己同型になります。これを変換の合成といい、 $g \circ f$ と表します。この「2つのものから新たな1つを作り出す」という操作は数の

計算に似ています。一般に、集合 A の 2 つの元 a, b があるとき、この 2 つから A の元を作る規則を演算とい
います。

自己同型の合成と普通の数の計算は「2 つのものから新たな 1 つを作り出す」という点だけでなく似たよう
な振る舞いをします。

問 2.4 実数の足し算と自己同型の合成との共通点、相違点を挙げてみましょう。

定義 2.1 (群) 集合 G における演算 $*$ が次の 3 条件を満たすとき G は $*$ について群であるという。

1. (結合法則) すべての $\sigma, \tau, \rho \in G$ に対して $\sigma * (\tau * \rho) = (\sigma * \tau) * \rho$ が成り立つ
2. (単位元の存在) $\epsilon \in G$ で、すべての $\sigma \in G$ に対して $\sigma * \epsilon = \epsilon * \sigma$ となるものが存在する。
3. (逆元の存在) すべての $\sigma \in G$ に対して $\sigma * \sigma^{-1} = \sigma^{-1} * \sigma$ となる $\sigma^{-1} \in G$ が存在する。

以上をまとめると、 $\text{Aut}(X)$ の研究はそれぞれの元を知るだけでなく、合成を演算とする群とみなし (X の
自己同型群といいます)、群としての性質を調べる必要があるといえます。

群の集合としての元の個数のことを群論では位数といいます。

定義 2.2 群の位数群 G に対して、元の個数 $|G|$ を群 G の位数という。位数が有限である群を有限群と
いう。

2 つの群について、位数が一致しているだけでなく演算の構造まで同じであることを同型であるといいま
す。(正確な定義はあとで行います) 位数 12 の群の例をいくつか紹介しましたが、それぞれの群は互いに同型
ではありません。位数 12 の群と言っても様々なものがあることになります。そこで、位数 12 の群はどれだ
けあるのか? (最初に挙げた群たちで尽きているのか、他にもまだまだあるのか) という問いが考えられます。
実は位数 12 の群は 5 種類存在することが知られています。(あとで証明を与えます)

一般に与えられた位数 n をもつ群は同型を同一視するとどれだけあるのかを問う問題が有限群の分類問題
です。

3 群の具体例と基本的な概念

自己同型群以外にも群の具体例はたくさんあります。いろいろな例を紹介するとともに基本的な概念につい
ても説明します。

3.1 具体例

例 3.1 (身近な例) \mathbb{Z} は通常の加法 $+$ について群である

\mathbb{Q} は通常の加法 $+$ について群である

\mathbb{Q}^* は通常の乗法 \times について群である

以上 3 つの例では演算の順序を変えても結果は変わりません。このような群は Abel 群と呼ばれます。

定義 3.1 (Abel 群) $\sigma, \tau \in G$ について $\sigma\tau = \tau\sigma$ が成り立つとき σ と τ は可換であるという。

群 G のすべての元が可換であるとき、 G は Abel 群であるという。

しかし、群の例には次のようなものもあります。