

論理学の基礎

株式会社すうがくぶんか 神戸祐太

2021/3/27-28

目次

0	イントロダクション：論理学とは？	1
1	命題論理	2
1.1	命題	2
1.2	論理記号と論理計算	6
1.3	必要条件, 十分条件, 対偶法	13
2	述語論理	16
2.1	述語	16
2.2	量化子	18
2.3	応用：様々な定理の表現	25
3	あとがき	26

0 イントロダクション：論理学とは？

次のよく知られた事実の証明を考えよう：

定理 0.1. どんな実数も 2 乗すると 0 以上である.

証明. x を実数とする.

x が実数 ならば $x \geq 0$ または $x \leq 0$ である.

$x \geq 0$ ならば $x^2 \geq 0$ である.

$x \leq 0$ ならば $x^2 \geq 0$ である.

したがって, x が実数 ならば $x^2 \geq 0$ である. \square

数学の証明では「 A ならば B である」や「 A または B 」といった言葉が繰り返し出てくる. 抽象的にいえば, 数学の証明とは得られた事実から

更に新たな事実を導くことを繰り返し、最終的な結論にいたる一連の文章である。このことを具体的に見るために、定理 0.1 の証明を下記のように記号化してみよう：

証明. A を仮定する.

A ならば p_1 または p_2 である.

p_1 ならば q である.

p_2 ならば q である.

したがって A ならば q である. □

記号	対応する命題
A	x は実数
p_1	$x \geq 0$
p_2	$x \leq 0$
q	$x^2 \geq 0$

このように、与えられた仮定や事実から別の事実を導き、そこから更に別の事実を導く一連の流れを論理 (logic) という。

本講義で解説する論理学は記号論理学 (symbolic logic) や数理論理学 (mathematical logic) と呼ばれるもので、我々が自然に用いている論理を記号化し、論理をより厳密かつ数学的に扱えるようにするものである。本講義ではその中でも基礎的な部分に焦点をあて、現代数学を正確に理解する上で最低限必要となる命題論理と述語論理について解説する。

1 命題論理

命題論理とは論理学の主役である命題の記号的な取り扱いをまとめたものである。この章では基本的な論理記号を解説し、与えられた問題や命題をより簡単なものに変換するための論理計算や、対偶法という数学では必須の証明法が使えるようになることを目標とする。

1.1 命題

1.1.1 命題の定義と例

命題 (proposition) とは真であるか偽であるかが客観的に定まる文章のことである。真とは正しいという意味であり、偽とは正しくないという意味である。

例 1.1. 命題となる文章および命題ではない文章の例を示す.

- 「1 の 2 乗は 1 である」は真な命題である. 実際, $1^2 = 1$ なのでこの文章は正しい.
- 「2 乗して 1 となる実数は 1 のみである」は偽な命題である. 実際, 実数 -1 はこの命題が正しくないことの証拠¹である.
- 「どんな三角形も内角の和は 180 度である」は真な命題である. よく知られているように, 三角形の内角の和は 180 度である.
- 「一辺の長さが 1 である正六角形の外角の和は -30 度である」は偽な命題である. 角度は正の実数であるため, その和が負になることはない.
- 「30000 円は高い」は命題ではない. 高いということの客観的定義が無いためである.²
- 「今日はあついなえ」は命題ではない. 感想には正しい, 正しくないが定まらない. また命題は意味が一意的となるようになるべく平文であることが望ましい.

例えば「2300 年 1 月 1 日の地球の全人口は 100 人である」のように, 現時点では真偽が不明だったり真偽を調べる方法が無いものでも, 客観的に真偽が定義される文章は命題となる. この文章の場合は本当に 2300 年 1 月 1 日の全人口が 100 人であれば真, そうでなければ偽であり, 客観的に数値で真偽が定義されるため命題となる.

数学における定理 (**theorem**) とは真であると判定された命題のことである. 数学とは与えられた命題の真偽を判定する学問といえよう.³

問 1.1. 以下の文章は命題か? 命題であるならばその真偽を答えよ.

- (1) 1 辺の長さが 1 の正三角形の外角の和は 150 度である.
- (2) 1000 円は安い.
- (3) 斜辺の長さが c , 他の 2 辺の長さが a, b である直角三角形について, $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つ.

解答. (1) 命題であり, 偽である. 実際, どんな多角形も外角の和は 360 度である.

¹このような証拠のことを反例という

²例えば 2000 円以上は高いと客観的に定義すれば命題となる.

³いわゆる数学の未解決問題とは真偽が不明な命題のことである.