離散フーリエ変換入門（前半）

離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform, 以下DFT）を一言で説明するなら「時系列に含まれる周期性を捉えるための計算」です。その計算は分かっただけでは抵抗感がないものですが、勉強しようとするとならば複素数や三角関数といった数学でも躓きやすい内容が登場するため、理解を諦めた経験を持つ人も多いのではないのでしょうか。

そこで、この講座「離散フーリエ変換入門」の前半では、

- DFTを理解するための知識の整理：複素平面
- DFTの導入

を行い、DFTに親しむことを目指します。

1 Introduction

離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform, 以下DFT）を数式で説明するならば、長さ T の時系列 $x_t, t = 0, 1, \dots, T - 1$ を

$$x_t = \sum_{s=0}^{T-1} X_s \exp\left(\frac{2\pi i s}{T} t\right)$$

と表したときの係数 X_s を求める計算のことです。これを言われて分かる人は既にDFTを知っている人だと思うので、ゆっくり解説していきましょう。

結局、何が分かればDFTに親しみが湧くのか？

ひとまず、長さ $T = 4$ の時系列 x_0, x_1, x_2, x_3 を考えます。例えば $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 2$ といった具合です。先ほどの式をこの場合にもう少し具体的に書き下してみましよう。

$$\begin{aligned}
 x_0 &= X_0 \exp\left(\frac{2\pi i \times 0}{4} \times 0\right) + X_1 \exp\left(\frac{2\pi i \times 1}{4} \times 0\right) + X_2 \exp\left(\frac{2\pi i \times 2}{4} \times 0\right) + X_3 \exp\left(\frac{2\pi i \times 3}{4} \times 0\right) \\
 x_1 &= X_0 \exp\left(\frac{2\pi i \times 0}{4} \times 1\right) + X_1 \exp\left(\frac{2\pi i \times 1}{4} \times 1\right) + X_2 \exp\left(\frac{2\pi i \times 2}{4} \times 1\right) + X_3 \exp\left(\frac{2\pi i \times 3}{4} \times 1\right) \\
 x_2 &= X_0 \exp\left(\frac{2\pi i \times 0}{4} \times 2\right) + X_1 \exp\left(\frac{2\pi i \times 1}{4} \times 2\right) + X_2 \exp\left(\frac{2\pi i \times 2}{4} \times 2\right) + X_3 \exp\left(\frac{2\pi i \times 3}{4} \times 2\right) \\
 x_3 &= X_0 \exp\left(\frac{2\pi i \times 0}{4} \times 3\right) + X_1 \exp\left(\frac{2\pi i \times 1}{4} \times 3\right) + X_2 \exp\left(\frac{2\pi i \times 2}{4} \times 3\right) + X_3 \exp\left(\frac{2\pi i \times 3}{4} \times 3\right)
 \end{aligned}$$

ここで、縦方向に時刻 t が、横方向にシグマ記号 $\sum$ の添字 s が走っていることに注意します。式をよく観察すると、時系列 x_t を4つの時系列

$$\exp\left(\frac{2\pi i \times 0}{4}t\right), \exp\left(\frac{2\pi i \times 1}{4}t\right), \exp\left(\frac{2\pi i \times 2}{4}t\right), \exp\left(\frac{2\pi i \times 3}{4}t\right)$$

に係数 X_0, X_1, X_2, X_3 をつけた和で表していることがわかります。DFTはこの係数 $X_0, \dots, X_3$ を求める計算のことでしたから、言い換えるなら「時系列 x_t に時系列 $\exp\left(\frac{2\pi i s}{T}t\right)$ はどれくらい含まれていますか？」を計算するのがDFTだということです。

何を知るべきかが見えた！

さて、皆さんはこう思うのではないのでしょうか。

– $\exp\left(\frac{2\pi i s}{T}t\right)$ ってなんですか？

結論から言うと、これは「**周期的**に値が変化する時系列」になっています。このことを理解するために、私たちは複素平面について勉強していきましょう。

2 複素平面に親しもう

複素数の復習