# 第1回　発展的な確率分布（前半）

## 1.1　Introduction

統計検定1級「統計応用」（理工学）では、さまざまな確率分布を統計モデリングに応用するための思考力や計算力がよく問われてきました。直近の出題傾向は以下の通りです。

- 2022年度問1: 複数の機械からなる生産ラインで生じる不良品の個数
- 2021年度問3: 機械部品の出荷前検査に関する統計モデル
- 2018年度問1: 不良品の発生に関するさまざまな統計モデル
- 2018年度問2: 部品が故障するまでの時間（寿命）の統計モデル

出題される確率分布は、二項分布・幾何分布・正規分布・指数分布・ガンマ分布・ベータ分布といった統計検定1級「統計数理」でも頻出なものに加え、**ワイブル分布・指数型分布族・ポアソン過程・超幾何分布**など、発展的な話題で現れるものが挙げられます。

この講義の第1回と第2回では、発展的な話題で現れるような確率分布に関する基礎知識を中心に解説し、演習問題による知識の定着を図ります。今回は、ワイブル分布と指数型分布族について解説します。

## 1.2　ワイブル分布

ワイブル分布の定義の解説し、その性質を例題形式で紹介します。

### 1.2.1　ワイブル分布の定義

ワイブル分布は指数分布と並んで、機器の故障時間のモデリングに多く応用されている確率分布です。機器が生産されてから故障するまでの時間を確率変数 $T$ で表すとします。このとき、累積分布関数として

$$\mathbb{P}[T \le t] = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}, \qquad t \ge 0$$

を考えます。この累積分布関数で定義される確率分布を**ワイブル分布**といい、$W(m, \eta)$ と表します。$m, \eta$ はそれぞれ正の実数で、形状パラメータ・尺度パラメータとよばれています。

### 1.2.2　ワイブル分布の確率密度関数

確率密度関数は次のようになります。なお、$m = 1$ の場合には指数分布 $Ex(1/\eta)$ と一致することがわかります。

**例題**　ワイブル分布の確率密度関数が以下のように与えられることを示してください。

$$f(t; m, \eta) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}, \qquad t \ge 0$$

また $W(0.5, 1), W(1, 1), W(2, 1)$ の場合で確率密度関数のグラフをかいてください。

**解答**　累積分布関数を微分することで証明できます。合成関数の微分公式を用いましょう。$r = t/\eta, s = (t/\eta)^m = r^m$ とおくと、

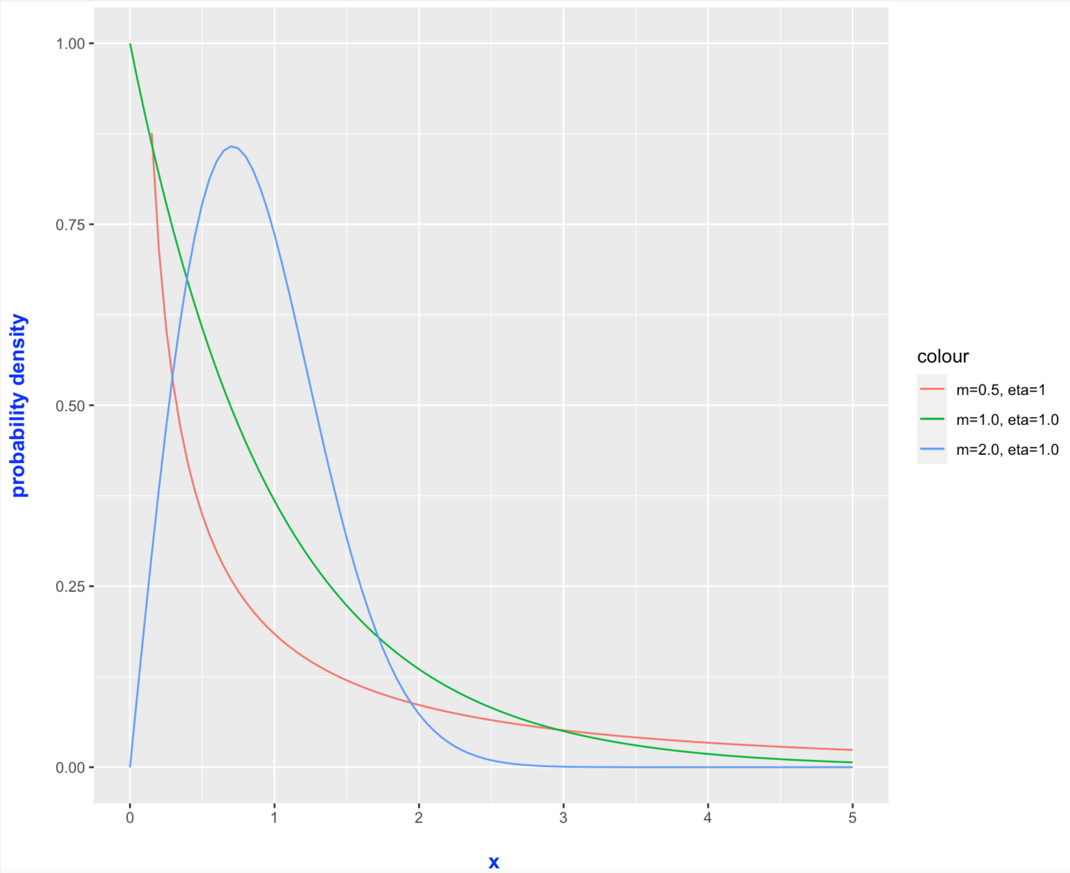
$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}[T \le t]}{dt} &= \frac{dr}{dt}\frac{ds}{dr}\frac{d}{ds}\{1 - \exp(-s)\} \\
&= \frac{1}{\eta} \times mr^{m-1} \times \exp s \\
&= \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}
\end{aligned}$$

と計算できます。これがワイブル分布の確率密度関数 $f(t; m, \eta)$ です。

次に確率密度関数の微分を計算して、グラフをかいてみましょう。微分は積の微分公式を用いて計算できます。

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(t;m,\eta) &= \frac{m}{\eta}\frac{m-1}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-2}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \\
&\quad -\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\} \\
&= \frac{m}{\eta^2}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-2}\exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\}\left\{(m-1)-m\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}\right\}
\end{aligned}
$$

この式のうち $(m-1)-m\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m}$ のみが $m \leq 1$ の場合には必ず負に、$m > 1$ の場合には正から負に符号が入れ替わるような関数になっています。つまり確率密度関数のグラフは、$m \leq 1$ の場合に単調減少、$m > 1$ の場合にunimodalなものが得られます。■




### 1.2.3　ワイブル分布の期待値・中央値・最頻値

ワイブル分布の期待値・中央値・最頻値は次のようになります。

**例題**　以下の関数をガンマ関数といいます。

$$
\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\exp(-t)dt
$$

ワイブル分布の期待値が $\eta\Gamma(1+(1/m))$、中央値が $\eta(\log 2)^{1/m}$、最頻値が

$$\begin{cases} \eta\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}, & m>1 \\ 0, & m\le 1 \end{cases}$$

であることを示してください。

**解答**　期待値は次のようにして求めることができます。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T &= \int_0^\infty tf(t;m,\eta)dt \\ &= \frac{m}{\eta^m}\int_0^\infty t^m \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}dt \\ &= \int_0^\infty t\exp(-s)\frac{ds}{dt}dt & s=\left(\frac{t}{\eta}\right)^m \\ &= \eta\int_0^\infty s^{1/m}\exp(-s)ds \\ &= \eta\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

中央値 $\tilde{t}$ は次の方程式の解です。

$$\mathbb{P}[T\le\tilde{t}]=0.5$$

これは $\exp(-(\tilde{t}/\eta)^m)=1/2$、さらに $(\tilde{t}/\eta)^m=\log 2$ と書き換えられるので、$\tilde{t}=\eta(\log 2)^{1/m}$ が得られます。

最頻値は1.2.2節の例題で求めた確率密度関数の最大値です。この関数は $m\le 1$ の場合に単調減少になるので、$m<1$ の場合は $t=0$ が最頻値になります。$m>1$ の場合は確率密度関数の導関数が 0 になる解を求めます。これは

$$(m-1)-m\left(\frac{t}{\eta}\right)^m=0$$

を解くことと同値です。これは $(t/\eta)^m=1-1/m$ と書き換えることができるので、$t=\eta\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{m}}$ が最頻値だとわかります。■

### 1.2.4　最小値統計量との関係

ワイブル分布は最小値統計量と関連のある分布です。

**例題**　$n$ 個の部品のそれぞれの故障までの時間を $T_1, \cdots, T_n$ で表すとします。これらが独立にパラメータ $m, \eta$ のワイブル分布 $W(m, \eta)$ に従うとき、最小値統計量 $M = \min(T_1, \cdots, T_n)$ もまたワイブル分布 $W\left(m, \frac{\eta}{n^{1/m}}\right)$ に従うことを示してください。

**解答**　最小値統計量 $M$ の累積分布関数を考えることでわかります。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[M \leq t] &= 1 - \mathbb{P}[M > t] \\
&= 1 - \mathbb{P}[T_1 > t] \times \cdots \times \mathbb{P}[T_n > t] \\
&= 1 - \exp\left\{-n\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\} \\
&= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta/n^{1/m}}\right)^m\right\}
\end{aligned}
$$

これはワイブル分布 $W\left(m, \frac{\eta}{n^{1/m}}\right)$ の累積分布関数です。■

## 1.3　指数型分布族

パラメータを1つだけ持つ確率分布を考え、そのパラメータを $\theta$、確率密度関数を $f(x;\theta)$ と表すことにします。もし確率密度関数が

$$
f(x;\theta) = h(x) \exp\left(t(x)\eta(\theta) - b(\theta)\right)
$$

の形で表されるとき、この確率分布は**指数型分布族**に属するといいます。

特に、$\eta(\theta) = \theta$ になるような場合を**正準形**、さらに $t(x) = x$ を満たす場合を**自然指数型分布族** といいます。また $\eta(\theta)$ を $\theta$ のかわりにパラメータとみなし、**自然パラメータ**とよびます。

**Remark**　Fisher-Neymannの因子分解定理から、$T = t(X)$ は $\theta$ の十分統計量です。■

以下では、問題形式で指数型分布族の例を確認していきます。

### 1.3.1　指数型分布族の例

ある確率分布が指数型分布族に属するかを確認するときには、確率密度関数の対数をとり

$$\log f(x;\theta) = t(x)\eta(\theta) - b(\theta) + d(x)$$

の形になるかを確認すると良いでしょう。ここで、$d(x) = \log h(x)$ です。

**例題**　以下の確率分布が指数型分布族に属することを確認してください。

(1)　$n$ を固定した二項分布 $Bin(n, p)$

(2)　ポアソン分布 $Po(\lambda)$

**解答**

(1)　二項分布の確率質量関数は $p(x;\pi) = {}_nC_x\pi^x(1-\pi)^{n-x}$ でした。対数を取ると、次のように式を整理することができます。

$$\begin{aligned}\log p(x;\pi) &= x\log\pi + (n-x)\log(1-\pi) + \log {}_nC_x \\ &= x\log\frac{\pi}{1-\pi} + n\log(1-\pi) + \log {}_nC_x\end{aligned}$$

$t(x) = x, \eta(\pi) = \log\frac{\pi}{1-\pi}, b(\pi) = -n\log(1-\pi), d(x) = {}_nC_x$ とおくことで、$n$ を固定した二項分布 $Bin(n, p)$ は指数型分布族に属することが確認できます。

(2)　ポアソン分布の確率質量関数は $p(x;\lambda) = e^{\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ でした。対数を取ると、次のように式を整理することができます。

$$\log p(x;\lambda) = x\log\lambda + \lambda - \log x!$$

$t(x) = x, \eta(\lambda) = \log\lambda, b(\lambda) = -\lambda, d(x) = -\log x!$ とおくことで、ポアソン分布 $Po(\lambda)$ は指数型分布族に属することが確認できます。■

### 1.3.2 期待値と分散

正準形の指数型分布族に対して、確率変数 $T = t(X)$ の期待値と分散を計算しましょう。

**例題**　確率変数 $X$ の確率密度関数がパラメータ $\eta$ を用いて次の形で書けるとします。

$$f(x;\eta) = h(x)\exp\left(t(x)\eta - b(\eta)\right)$$

このとき、以下の問いに答えてください。ただし、微分と積分の順序交換といった正則性は仮定するものとします。

(1)　以下の式を証明してください。

$$\exp b(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\exp(\eta t(x))dx$$

(2)　$T = t(X)$ の期待値が $\mathbb{E}[T] = b'(\eta)$、分散が $\mathbb{V}[T] = b''(\eta)$ であることを示してください。Hint : (1)の等式を $\eta$ で微分してみましょう。

**解答**

(1)　確率の総和が 1 であることから、以下の式が従います。

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\exp(\eta t(x) - b(\eta))dx = 1$$

両辺を $\exp b(\eta)$ 倍すれば、問題の等式を得ることができます。

(2)　(1) の式を $\eta$ で微分すると、次の等式を得ることができます。

$$b'(\eta)\exp b(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)h(x)\exp(\eta t(x))dx$$

この両辺を $\exp(-b(\eta))$ 倍することで期待値の等式を証明できます。

$$\begin{aligned} b'(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} t(x)h(x)\exp(\eta t(x) - b(\eta))dx \\ &= \mathbb{E}[T] \end{aligned}$$

もう一度 $\eta$ で微分してみましょう。

$$
\begin{aligned}
b''(\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} t(x)(t(x) - b'(\eta))h(x)\exp(\eta t(x) - b(\eta))dx \\
&= \mathbb{E}[T^2 - \mathbb{E}[T]T] \\
&= \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]^2 \\
&= \mathbb{V}[T]
\end{aligned}
$$

以上により分散の等式もまた証明できました。■

## 問1　故障時間とワイブル分布の関係

機械が故障するまでの時間を生存時間といいます。これを確率変数 $T$ で表すことにします。機械の時刻 $t$ における故障率は、時刻 $t$ 時点で未故障の機械のうち、時刻 $t$ で故障する機械がどれくらい多いかで定義されます。

$$f(t \mid T > t) = \frac{f(t)}{\mathbb{P}[T > t]}$$

これを故障率曲線といいます。故障率曲線はワイブル分布のハザード関数を用いてモデリングされることが一般的です。ワイブル分布とは、次のような累積分布関数で定義される確率分布のことです。

$$\mathbb{P}[T \leq t] = 1 - \exp\left(-bt^k\right), \qquad t > 0$$

式の中に現れる $k, b$ はパラメータです。それぞれ形状パラメータ・尺度パラメータとよばれています。以下の問いに答えてください。

(1)　Weibull分布のハザード関数を求めてください。

(2)　初期故障・偶発故障・摩耗故障それぞれの場合に対して、故障率をWeibull分布でモデリングすることを考えます。初期故障・偶発故障・摩耗故障それぞれの故障率曲線は、ハザード関数が単調減少、一定、単調増加の場合に対応します。ことを参考に、それぞれの場合でWeibull分布のパラメータが満たすべき条件を答えてください。

(3)　機器の故障時間がワイブル分布に従っているか、また従っているとしてパラメータ $k, b$ がいくらなのかを考える方法の一つにワイブル・プロットがあります。ワイブル・プロットとは、$n$ 個の機械が故障した時間を小さい順に $t_{(1)}, \cdots, t_{(n)}$ と表すとき、点 $\left(\log t_{(i)}, \log\log \dfrac{1}{1 - i/n}\right)$ をプロットしたものです。なぜこのプロットで、先ほどのような考察ができるのかを説明してください。

(4)　確率変数 $T_e, T_r, T_f$ をそれぞれ機械が初期故障、偶発故障、摩耗故障するまでの時間とし、独立にWeibull分布に従っているとします。いずれかの理由で故障するまでの時間 $T = \min(T_e, T_r, T_f)$ に関するハザード関数を求めてください。

(5)　(4)で求めたハザード関数が、ただ一つの最小解 $t^*$ を持ち、$t \leq t^*$ では単調減少、$t \geq t^*$ では単調増加するような関数であることを示してください。

### 1.1　(1)の解答

確率密度関数は、累積分布関数の微分なので

$$f(t) = bkt^{k-1} \exp(-bt^k), \qquad t > 0$$

になります。この結果、ハザード関数は次のように得られます。

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{bkt^{k-1} \exp(-bt^k)}{\exp(-bt^k)} \\ &= bkt^{k-1} \end{aligned}$$

### 1.2　(2)の解答

(1)の結果から、Weibull分布のハザード関数は $k < 1$ の場合に単調減少、$k = 1$ の場合に一定、$k > 1$ の場合に単調増加します。つまり初期故障は $k < 1$ のWeibull分布、偶然故障は $k = 1$ のWeibull分布、 摩耗故障は $k > 1$ のWeibull分布でモデリングすることが適切だとわかります。

### 1.3　(3)の解答

$i/n$ は累積分布関数の推定値なので、ワイブルプロットは $\log t$ を横軸 $x$ に、$\log\log \dfrac{1}{1-F(t)}$ を縦軸 $y$ に取ったグラフと考えることができます。ワイブル分布の累積分布関数は $F(x) = 1 - \exp\left(-bt^k\right)$ なので

$$\begin{aligned} y &= \log\log \frac{1}{1-F(t)} \\ &= \log\log \frac{1}{\exp(-bt^k)} \\ &= \log bt^k \\ &= k \log t + \log b \\ &= kx + b \end{aligned}$$

が成り立ちます。すなわち、もし機械の故障時間がワイブル分布に従っているのであれば、点は直線上に並び、その直線の傾きは $k$ かつ切片は $b$ です。

**Remark**　つまり、初期故障・偶発故障・摩耗故障はワイブル・プロットの傾きで区別することができます。

## 1.4　(4)の解答

$T$ の生存関数は、$T_e \sim W(b_e, k_e), T_r \sim W(b_r, 1), T_f \sim W(b_f, k_f)$ が独立であることに注意すると、次のように計算できます。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T > t] &= \mathbb{P}[T_e > t \text{ かつ } T_r > t \text{ かつ } T_f > t] \\ &= \mathbb{P}[T_e > t]\mathbb{P}[T_r > t]\mathbb{P}[T_f > t] \\ &= \exp\left\{-(b_e t^{k_e} + b_r t + b_f t^{k_f})\right\}\end{aligned}$$

この結果からハザード関数を求めます。確率密度関数は

$$f(t) = (b_e k_e t^{k_e - 1} + b_r + b_f k_f t^{k_f - 1}) \exp\left\{-(b_e t^{k_e} + b_r t + b_f t^{k_f})\right\}$$

と求められるので、ハザード関数は次のようになります。

$$\lambda(t) = b_e k_e t^{k_e - 1} + b_r + b_f k_f t^{k_f - 1}$$

## 1.5　(5)の解答

ハザード関数の1階微分は、次のようになります。

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= b_e k_e (k_e - 1) t^{k_e - 2} + b_f k_f (k_f - 1) t^{k_f - 2} \\ &= t^{k_e - 2}\left\{b_e k_e (k_e - 1) + b_f k_f (k_f - 1) t^{k_f - k_e}\right\}\end{aligned}$$

$t > 0$ では $t^{k_e - 2} > 0$ が成り立ちます。また、$k_e < 1$ なので $b_e k_e (k_e - 1) < 0$、$k_f > 1$ なので $b_f k_f (k_f - 1) > 0$ が成り立ちます。ゆえに、ハザード関数は

$$t^* = \left(-\frac{b_f k_f (k_f - 1)}{b_e k_e (k_e - 1)}\right)^{\frac{1}{k_e - k_f}} \tag{1}$$

で一つの最小解 $t^*$ を持ち、$t \leq t^*$ では単調減少、$t \geq t^*$ では単調増加するような関数であることがわかります。

**Remark**　現実の故障率曲線は「バスタブ形」になることが経験的に知られています。以上の議論から、ハザード関数をWeibull分布を用いてモデリングすれば、「バスタブ形」の故障率曲線を再現できることがわかりました。

## 問2　指数型分布族の性質

確率変数 $X$ の確率密度関数がパラメータ $\eta, \psi$ を用いて次の形で書けるとします。

$$f(x;\eta,\psi) = h(x;\psi)\exp\left(\frac{x\eta - b(\eta)}{\psi}\right)$$

このとき、以下の問いに答えてください。ただし、微分と積分の順序交換といった正則性は仮定するものとします。

(1)　期待値が $1/\beta$, 分散が $\alpha/\beta^2$ のガンマ分布の確率密度関数がこの形で表せることを証明してください。

(2)　この確率分布のモーメント母関数 $\mathcal{M}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$ が

$$\mathcal{M}_X(t) = \exp\left(\frac{b\left(\eta + \psi t\right) - b(\eta)}{\psi}\right)$$

となることを示してください。また、期待値と分散がそれぞれ $b'(\eta), \psi b''(\eta)$ であることを証明してください。

(3)　$X_1, \cdots, X_n$ が独立に確率密度関数 $f(x;\eta,\psi)$ の分布に従っているとします。このとき、$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の確率密度関数が $f(x;\eta,\psi/n)$ であることを示してください。

## 2.1 (1)の解答

確率密度関数の対数を取ったときに、次のような式になることを確認します。

$$\log f(x; \eta, \psi) = \frac{x\eta - b(\eta)}{\psi} + (x\text{と}\psi\text{の式})$$

ガンマ分布の確率密度関数は次のように表されます。

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \qquad x > 0$$

これの対数を取ると次のようになります。ここで $\eta = \dfrac{\beta}{\alpha}, \psi = -\dfrac{1}{\alpha}$ とおくと、$\alpha = -\dfrac{1}{\psi}, \beta = -\dfrac{\eta}{\psi}$ であることに注意します。

$$\begin{aligned}
\log f(x; \alpha, \beta) &= -x\beta + \alpha \log \beta + (\alpha - 1) \log x - \log \Gamma(\alpha) \\
&= \frac{x\eta}{\psi} - \frac{1}{\psi} \log \frac{\eta}{-\psi} + \left( -\frac{1}{\psi} - 1 \right) \log x - \log \Gamma \left( \frac{1}{-\psi} \right) \\
&= \frac{x\eta - \log \eta}{\psi} + (x\text{と}\psi\text{の式})
\end{aligned}$$

以上から、ガンマ分布を与えられた形で表せることがわかりました。

## 2.2 (2)の解答

モーメント母関数は定義通りに計算することで証明できます。

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_X(t) &= \mathbb{E}[\exp(tX)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) h(x; \psi) \exp\left( \frac{x\eta - b(\eta)}{\psi} \right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(x; \psi) \exp\left( \frac{x(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi} \right) dx \\
&= \exp\left( \frac{b(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi} \right) \int_{-\infty}^{\infty} h(x; \psi) \exp\left( \frac{x(\eta + \psi t) - b(\eta + \psi t)}{\psi} \right) dx \\
&= \exp\left( \frac{b(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi} \right)
\end{aligned}$$

期待値は $\mathbb{E}[X] = \mathcal{M}'_X(0)$ でした。モーメント母関数を微分すると、

$$\mathcal{M}'(t) = b'(\eta + \psi t) \exp\left(\frac{b(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi}\right)$$

なので、$\mathbb{E}[X] = \mathcal{M}'{}_X(0) = b'(\eta)$ が従います。分散は、分散の公式 $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ および $\mathbb{E}[X^2] = \mathcal{M}''_X(0)$ を用いて求めます。

$$\mathcal{M}''(t) = \psi b''(\eta + \psi t) \exp\left(\frac{b(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi}\right) + b'(\eta + \psi t)^2 \exp\left(\frac{b(\eta + \psi t) - b(\eta)}{\psi}\right)$$

なので、$\mathbb{E}[X^2] = \mathcal{M}''_X(0) = \psi b''(\eta) + b'(\eta)^2$ が従い、分散は $\mathbb{V}[X] = \psi b''(\eta)$ だとわかります。

## 2.3　(3)の解答

$X_1, \cdots, X_n$ は独立なので、$\bar{X}$ のモーメント母関数は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\bar{X}}(t) &= \mathbb{E}[\exp(tX_1/n)] \times \cdots \times \mathbb{E}[\exp(tX_n/n)] \\
&= \mathcal{M}_{X_1}(t/n) \times \cdots \times \mathcal{M}_{X_n}(t/n) \\
&= \exp\left(n \times \frac{b(\eta + \psi t/n - b(\eta)}{\psi}\right) \\
&= \exp\left(\frac{b(\eta + (\psi/n)t) - b(\eta)}{\psi/n}\right)
\end{aligned}$$

と求めることができます。あとはモーメント母関数と確率分布の1:1対応から、$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ の確率密度関数が $f(x; \eta, \psi/n)$ であることが従います。