

# 第1回 確率分布の特性値の計算

## 1.1 計算練習：モーメントの計算

ここでは確率分布のモーメントの計算の練習をしていきます。連続型確率分布と離散型確率分布のそれぞれで具体的な計算例を解いてみましょう。

### 1.1.1 連続型確率分布のモーメント

連続型の確率分布が確率密度関数  $f(x)$  で定義されるとき、その原点まわりの  $k$  次モーメントは次のように定義されるのでした。

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

要するに、確率密度関数が  $f(x)$  の確率変数  $X$  について、 $X^k$  の期待値  $\mathbb{E}[X^k]$  を考えたものが原点まわりの  $k$  次モーメントです。

連続型確率分布のモーメントを計算する上で、次の公式はとても有用なのでぜひ押さえておくことをお勧めします。

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

$\Gamma(\alpha)$  はガンマ関数と呼ばれるものです。定義の紹介は割愛しますが

- $\Gamma(1) = 1, \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

いう性質を満たすという事実を押さえておくといいでしょう。例えば  $n$  が正の整数のとき、 $\Gamma(n + 1) = n!$  になります。

## 第1問：ガンマ分布のモーメント

$\alpha, \beta$  を正の実数とします。以下のような確率密度関数を持つ分布をパラメータ  $(\alpha, \beta)$  のガンマ分布と言います。

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0$$

以下の問いに答えてください。

- (1) ガンマ分布の期待値と分散の値を求めてください。
- (2) ガンマ分布の原点まわりの  $k$  次モーメントの値を求めてください。

## 第2問：標準正規分布とカイ2乗分布のモーメント

以下のような確率密度関数を持つ分布を標準正規分布と言います。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

また、確率変数  $X_1, \dots, X_n$  が独立に標準正規分布に従うとき、 $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$  が従う確率分布を自由度  $n$  のカイ2乗分布と言います。以下の問いに答えてください。

- (1) 標準正規分布の原点まわりの  $k$  次モーメントの値を求めてください。
- (2) 自由度  $n$  のカイ2乗分布の期待値と分散を求めてください。

## 1.1.2 離散型確率分布のモーメント

離散型の確率分布が確率質量関数  $p(x)$  で定義されるとき、その  $k$  次モーメントは次のように定義されるのでした。

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} x^k p(x)$$

要するに、確率質量関数が  $p(x)$  の確率変数  $X$  について、 $X^k$  の期待値  $\mathbb{E}[X^k]$  を考えたものが  $k$  次モーメントです。

離散型確率分布のモーメントを計算する上では、二項定理

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

や負の二項定理（証明は1.1.3節参照）

$$(x + y)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k y^{-n-k}$$

および様々な関数のTaylor展開を知っておくと便利です。例えば、指数関数の  $x = 0$  まわりでのTaylor展開は

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

でした。

### 第3問：二項分布の期待値と分散

$n$  を正の整数、 $p$  を 0以上1 以下の実数とします。以下のような確率質量関数を持つ確率分布をパラメータ  $(n, p)$  の二項分布と言います。

$$p(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

パラメータ  $(n, p)$  の二項分布の期待値・分散を求めてください。

Hint: 分散を求める際は、先に  $\mathbb{E}[X(X-1)]$  を計算すると良いでしょう。

#### 第4問 : Poisson分布の期待値と分散

$\lambda$  を正の実数とします。以下のような確率質量関数を持つ確率分布をパラメータ  $\lambda$  のPoisson分布と言います。

$$p(x; \lambda) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

パラメータ  $\lambda$  のPoisson分布の期待値・分散を求めてください。

## 第5問：負の二項分布の期待値と分散

$n$  を正の整数、 $p$  を0以上1以下の実数とします。以下のような確率質量関数を持つ確率分布をパラメータ  $(n, p)$  の負の二項分布と言います。

$$p(x; n, p) = \binom{n+x-1}{x} p^n (1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

パラメータ  $(n, p)$  の負の二項分布の期待値と分散を求めてください。

### 1.1.3 負の二項定理の証明

興味のある方向けに負の二項定理の証明を説明します。1.1.2節で紹介した負の二項定理を再掲しましょう。

**定理** :  $n$  を正の整数とします。

$$(x + y)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k y^{-n-k}$$

という公式が成り立ちます。

**証明** : 数学的帰納法で証明しましょう。  $n = 1$  のときを考えます。このとき、左辺  $\frac{1}{x+y}$  を実際に  $y$  に注目して展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{y} \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \\ &= \frac{1}{y} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{y})} \\ &= y^{-1} - xy^{-2} + x^2y^{-3} + \dots \quad \text{初項 } \frac{1}{y}, \text{公比 } -\frac{x}{y} \text{ の等比級数} \end{aligned}$$

となります。  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{k}{k} = 1$  なのでこれは右辺と一致しています。要するに、  $n = 1$  のときは正しいと分かったわけです。また、  $n = d$  まで公式が正しいとして  $n = d + 1$  のときに公式が成り立つかを考えます。

$$\begin{aligned} (x + y)^{-(d+1)} &= (x + y)^{-1} (x + y)^{-d} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k y^{-k-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{d+l-1}{l} x^l y^{-d-l} && \text{数学的帰納法の仮定を用いた} \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \binom{d+l-1}{l} x^{k+l} y^{-(d+1)-(k+l)} && \text{各項の積を計算} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{l=0}^m \binom{d+l-1}{l} x^m y^{-(d+1)-m} && m = k + l \text{ とおいた} \end{aligned}$$

を得ますが、ここで

$$\sum_{l=0}^m \binom{d+l-1}{l} = \binom{d+m}{m}$$

がパスカル三角形  $\binom{d+m}{m} + \binom{d+m}{m+1} = \binom{d+m+1}{m+1}$  を用いて示せることに注意すれば、  $n = d$  まで公式が正しい場合には  $n = d + 1$  のときにも公式は正しいことがわかります。■

**Remark** : 実際には収束半径を議論する必要がありますが、今回は割愛します。



## 1.2 理論演習 : モーメント母関数とその性質

---

確率変数  $X$  に対して、形式的な変数  $t$  を用いて次のような関数を定義します。

$$M_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$$

これを確率変数  $X$  の**モーメント母関数**と言います。例えば、確率変数  $X$  が確率密度関数  $f(x)$  で定義される連続型の確率分布に従っているとき、モーメント母関数は、次の積分を計算することで求められるわけです。

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx$$

また、モーメント母関数の類似として**確率母関数**

$$G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$$

を考える場合もありますが、今回は割愛します。この節では、モーメント母関数の応用として以下の2つの内容を紹介していきます。

1. モーメントの計算への応用
2. 再生性の証明への応用

## 1.2.1 モーメントの計算への応用

### 第6問：モーメントの計算への応用

確率変数  $X$  の確率密度関数を  $f(x)$  と書いたとき、次のように定義される関数を確率変数  $X$  のモーメント母関数と言います。

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx$$

$n$  を正の整数としたとき、確率密度関数  $f(x)$  が以下の性質を満たすとします。

$$\frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp(tx) f(x) dx$$

次の問いに答えてください。

(1)  $k$  を正の整数とします。  $\mathbb{E}[X^k] = M^{(k)}(0)$  を証明してください。

(2) 確率変数  $X$  の確率密度関数を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

としたとき、確率変数  $X$  のモーメント母関数  $M_X(t)$  を求めてください。

(3) (2)の設定の基で確率変数  $X$  の原点まわりの  $k$  次モーメント  $\mathbb{E}[X^k]$  を求めてください。

Hint. 指数関数  $\exp(x)$  の  $x = 0$  まわりでのTaylor展開を用いると良いでしょう。

## 1.2.2 再生性とその証明への応用

確率分布の集合を**確率分布族**と言います。例えば、正規分布を全て集めた集合

$$\{N(\mu, \sigma^2) \mid \mu \text{は実数}, \sigma^2 \text{は正の実数}\}$$

は正規分布族と呼ばれます。さて、確率分布族  $\mathcal{D}$  に属する2つの確率分布  $D_1, D_2$  を任意にとり、確率変数  $X_1$  が確率分布  $D_1$  に、確率変数  $X_2$  が確率分布  $D_2$  に独立に従っているとします。

$X_1 + X_2$  が従う確率分布もまた確率分布族  $\mathcal{D}$  に属するとき、確率分布族  $\mathcal{D}$  は**再生性**を持つと言います。例えば、正規分布族は再生性を持ちます。

### 第7問：再生性の証明への応用その1

$\mu$  を実数とし、 $\sigma^2$  を正の実数とします。確率密度関数

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で定義される確率分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の集合を  $\mathcal{D} = \{N(\mu, \sigma^2) \mid \mu \text{は実数}, \sigma^2 \text{は正の実数}\}$  と書くことにします。以下の問いに答えてください。

(1) 確率変数  $X$  の確率密度関数が  $f(x; \mu, \sigma^2)$  のときのモーメント母関数  $\mathbb{E}[\exp(tX)]$  を求めてください。

(2) 確率分布族  $\mathcal{D}$  が再生性を持つことを示してください。モーメント母関数と確率分布との間に1:1の対応があるという事実は証明なしに用いて良いものとします。

**Remark** : この問題の結果は「正規分布族は再生性を持つ」と表現されるものです。

## 第8問：再生性の証明への応用その2

$\alpha$  を任意の正の実数とし、 $\beta$  をある固定された正の実数します。確率密度関数

$$f(x; \alpha) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0$$

で定義される確率分布を  $D(\alpha)$  と書き、 $\mathcal{D} = \{D(\alpha) \mid \alpha > 0\}$  でこの確率分布族を表すことにします。以下の問いに答えてください。

- (1) 確率変数  $X$  の確率密度関数が  $f(x; \alpha)$  のときのモーメント母関数  $\mathbb{E}[\exp(tX)]$  を求めてください。
- (2) 確率分布族  $\mathcal{D}$  が再生性を持つことを示してください。モーメント母関数と確率分布との間に1:1の対応があるという事実は証明なしに用いて良いものとします。

**Remark:** この問題の結果は「ガンマ分布のパラメータ  $\alpha$  は再生性を持つ」と表現されるものです。