

大人のための高校数学ⅢC

山本拓人 (すうがくぶんか)

2023年10月5日

目次

第I部 極限(数学Ⅲ)	3
1 数列の極限	4
1.1 収束する数列	4
1.2 発散する数列	6
1.3 等比数列の極限	9
1.4 様々な数列の極限	11
1.4.1 (多項式)/(多項式)型	11
1.4.2 (指数関数)/(指数関数)型	13
1.4.3 いくつかの $\infty - \infty$ 型の極限	14
1.4.4 はさみうちの原理	15
2 無限級数	17
2.1 無限級数の定義と具体例	18
2.2 無限級数の収束条件	19
2.3 無限等比級数	21
3 関数の極限	25
3.1 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	25
3.2 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	28
3.3 関数の極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$	31
3.4 はさみうちの原理	33
4 関数の連続性	36
4.1 関数の連続性の定義と具体例	36
4.2 中間値の定理	39
第II部 微分法(数学Ⅲ)	41

5	微分法の考え方と種々の基本公式	41
5.1	微分係数と導関数	41
5.2	積の微分公式と商の微分公式	44
5.3	合成関数の微分公式	45
5.4	逆関数の微分公式	45
5.5	三角関数の微分公式	45
5.6	指数関数の微分公式	45
5.7	対数関数の微分公式	45
6	関数の増減とグラフ	46
7	平均値の定理	47
第Ⅲ部 積分法(数学Ⅲ)		48
第Ⅳ部 ベクトル(数学C)		49
第Ⅴ部 複素数(数学C)		50
8	複素数の基本	50
8.1	複素数の定義と四則演算	50
8.2	共役複素数	52
8.3	代数方程式の複素数解	53
9	複素平面	55
9.1	複素平面の考え方	55
9.2	絶対値	56
10	極形式	60
10.1	極形式の定義	60
10.2	極形式で表された複素数の積	61
10.3	極形式で表された複素数の商	62
11	複素平面上の点・ベクトルの移動	65
11.1	複素平面上の点の平行移動と回転・拡大縮小	65
11.2	複素平面上のベクトルの平行移動と回転・拡大縮小	68
12	ド・モアブルの定理	70
12.1	$z^n = \alpha$ 型の方程式	70
12.2	n 乗根	71

第 I 部

極限 (数学 III)

数学 II では関数の微分法を考える際に関数の極限を考えました。数学 III で学ぶ極限は

- 数列の極限
- 関数の極限

の 2 種類あります。どちらも「どんな値に近付いていくか」について述べるもので、似ている性質を多くもちます。この第 II 章ではこれらの極限とそれぞれの応用として無限級数と関数の連続性を学びます。最初にこれらについて軽く触れておきましょう。

[数列の極限] 一般項が $a_n = \frac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots \quad (0.1)$$

となっており、 n を大きくしていくと限りなく 0 に近付いていくことが見てとれますね。このように n を大きくするとき数列の項 a_n がどのような値に近付いていくかを考えるのが数列の極限です。また、この数列の極限を用いると無限級数を考えることができます。無限級数とは

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \quad (0.2)$$

のように無限に項を足し続けていったときに、どのような値に近付いていくかを考えるものです。[\[1\]](#)

[関数の極限] 関数 $f(x) = x - 1$ について、実数 x を 2 に近付けることを考えます。このときの近付け方は

$$x = 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \dots \quad (0.3)$$

と 2 より大きい方から近付けると、 $f(x)$ は

$$f(x) = 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \dots \quad (0.4)$$

と 1 に近付いていくことが分かります。また

$$x = 1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, \dots \quad (0.5)$$

と 2 より小さい方から近付ける場合でも、 $f(x)$ は

$$x = 0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, \dots \quad (0.6)$$

と 1 に近付いていきます。このように x をある値 α に近付けるときに関数の値 $f(x)$ がどのような値に近付いていくかを考えるのが関数の極限です。[\[2\]](#) また、この関数の極限を用いると関数の連続性を考えることができます。関数の連続性とは直感的には「グラフが途切れずに繋がっている」ということを表すもので、関数の連続性から方程式の解の存在を証明できることがあるなど重要な関数の概念のひとつになっています。

*1 実はこの無限級数は 1 に近付いていきます。詳しくは第 [2](#) 節で説明しています。

*2 この他にも x を限りなく大きくする極限などもあります。詳しくは第 [3](#) 節で説明しています。

1 数列の極限

ここでは数列 $\{a_n\}$ について、 n が大きくなるにつれて項 a_n がどのような振る舞いをするかを考えていきます。

1.1 収束する数列

一般項が $a_n = \frac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad a_{100} = \frac{1}{100}, \quad \dots \quad (1.1)$$

と n を大きくしていくと限りなく 0 に近付いていくことが見てとれます。他にも一般項が $b_n = \frac{n+1}{n}$ の数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{5}{4}, \quad \dots, \quad b_{100} = \frac{101}{100}, \quad \dots \quad (1.2)$$

と n を大きくしていくと限りなく 1 に近付いていくことが見てとれます。このように、 n を大きくしていくときに数列がある値に近付くことを次のように定めます。

定義 1.1. 数列 $\{a_n\}$ に対して、 n を限りなく大きくするとき、 a_n がある一定の値 α に近付くことを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \quad (1.3)$$

などと表し、数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という。また、 α を数列 $\{a_n\}$ の**極限值**という。

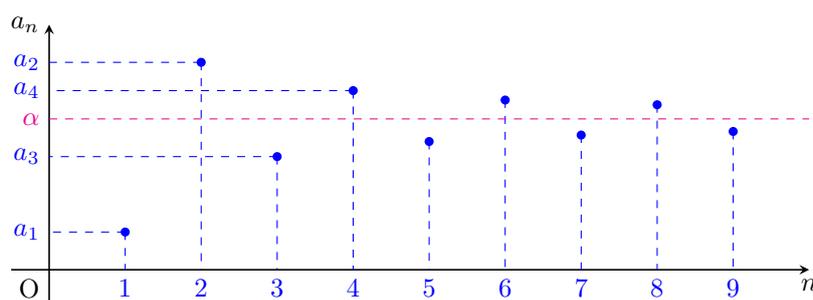


図1 数列の極限

例 1.2. 一般項が $a_n = \frac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (1.4)$$

である。また、このことを「数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する」「数列 $\{a_n\}$ の極限值は 0 である」という。□

例 1.3. 一般項が $b_n = \frac{n+1}{n}$ の数列 $\{b_n\}$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1 \quad (1.5)$$

である。また、このことを「数列 $\{b_n\}$ は 1 に収束する」「数列 $\{b_n\}$ の極限值は 1 である」という。□

補足 1.4. 数列の極限で大切なことは a_n がどのような値に近づくかという点です。 $\frac{1}{n}$ は n を大きくしていくと 0 に「近づく」だけで 0 となるわけではありませんし、 $\frac{n+1}{n}$ も n を大きくしていくと 1 に「近づく」だけで 1 となるわけではありません。つまり、等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (1.6)$$

は「『 n を限りなく大きくするときの項 a_n の近付き先』が α 」という意味であることに注意してください。

問題 1.1. 次のように数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を定めるとき、数列 $\{a_n\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

$$(1) a_n = 2 - \frac{1}{n} \quad (2) a_n = \frac{1}{n+1} \quad (3) a_n = \frac{1}{2^n} \quad (4) a_n = \frac{1}{(-2)^n} - 1 \quad (5) a_n = 3$$

収束する数列の極限について成り立つ次の性質は、数列の極限の計算において重要です。

定理 1.5. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ α , β に収束するとする。このとき、次が成り立つ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n + lb_n) = k\alpha + l\beta$ (k, l は定数)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha\beta$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ ($\beta \neq 0$ のとき)

(1) の k と l はどんな定数でも成り立つので、

- $k = 1, l = 1$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
- $k = 1, l = -1$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$
- $l = 0$ とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k\alpha$ ^{*3}

が成り立つことが分かります。つまり、(1) から収束する数列の和・差・定数倍の極限はバラバラに計算して

*3 (2) で $b_n = k$ としても得られます。

よいことが分かりますね。また、(2) と (3) から収束する数列の積・商の極限もバラバラに計算してよいことが分かりますね。

例 1.6. 収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ を満たすとき、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= 1 - 2 = -1, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= 1 + 2 = 3, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 4b_n) &= 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -5, & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

が成り立つ。また、これらより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(a_n + b_n) = 1 \cdot 3 = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{3a_n - 4b_n} = -\frac{2}{5} \quad (1.8)$$

が成り立つ。□

問題 1.2. 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{2}{3^n} \right) \quad (1.9)$$

問題 1.3. α に収束する数列 $\{a_n\}$ を考える。任意の正の整数 k に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \alpha^k \quad (1.10)$$

が成り立つことを k に関する数学的帰納法により示せ。

1.2 発散する数列

ここまでは収束する数列 (極限值をもつ数列) を考えてきましたが、数列はいつでも収束するとは限りません。

例 1.7. 一般項が $a_n = n^2$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad \dots, \quad a_{100} = 10000, \quad \dots \quad (1.11)$$

となっており、 n をどんどん大きくすると a_n はどこまでも大きくなっていくので、 a_n が何らかの値に近付くということはありませんね。数列の項 a_n が何らかの値に近付くときに収束すると言ったのでしたから、この数列 $\{a_n\}$ は収束しないということになりますね。

定義 1.8. 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、数列 $\{a_n\}$ は**発散する**という。