大人のための高校数学 ⅢC

山本拓人 (すうがくぶんか)

2023 年 10 月 5 日

目次

第 I 部

極限 (数学 III)

数学 II では関数の微分法を考える際に関数の極限を考えました．数学 III で学ぶ極限は

- **数列の極限**
- **関数の極限**

の 2 種類あります．どちらも「どんな値に近付いていくか」について述べるもので，似ている性質を多くもちます．この第 I 章ではこれらの極限とそれぞれの応用として**無限級数**と**関数の連続性**を学びます．最初にこれらについて軽く触れておきましょう．

[**数列の極限**] 一般項が $a_n = \dfrac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \dots \tag{0.1}$$

となっており，n を大きくしていくと限りなく 0 に近付いていくことが見てとれますね．このように n を大きくするときに数列の項 a_n がどのような値に近付いていくかを考えるのが**数列の極限**です．また，この数列の極限を用いると**無限級数**を考えることができます．無限級数とは

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \dots \tag{0.2}$$

のように無限に項を足し続けていったときに，どのような値に近付いていくかを考えるものです．[*1]

[**関数の極限**] 関数 $f(x) = x - 1$ について，実数 x を 2 に近付けることを考えます．このときの近付け方は

$$x = 2.1,\ 2.01,\ 2.001,\ 2.0001, \dots \tag{0.3}$$

と 2 より大きい方から近付けると，$f(x)$ は

$$f(x) = 1.1,\ 1.01,\ 1.001,\ 1.0001, \dots \tag{0.4}$$

と 1 に近付いていくことが分かります．また

$$x = 1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ 1.9999, \dots \tag{0.5}$$

と 2 より小さい方から近付ける場合でも，$f(x)$ は

$$x = 0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999, \dots \tag{0.6}$$

と 1 に近付いていきます．このように x をある値 α に近付けるときに関数の値 $f(x)$ がどのような値に近付いていくかを考えるのが**関数の極限**です．[*2] また，この関数の極限を用いると**関数の連続性**を考えることができます．関数の連続性とは直感的には「グラフが途切れずに繋がっている」ということを表すもので，関数の連続性から方程式の解の存在を証明できることがあるなど重要な関数の概念のひとつになっています．

[*1] 実はこの無限級数は 1 に近付いていきます．詳しくは第 2 節で説明しています．

[*2] この他にも x を限りなく大きくする極限などもあります．詳しくは第 3 節で説明しています．

1　数列の極限

ここでは数列 $\{a_n\}$ について，n が大きくなるにつれて項 a_n がどのような振る舞いをするかを考えていきます．

1.1　収束する数列

一般項が $a_n = \dfrac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad a_{100} = \frac{1}{100}, \quad \ldots \tag{1.1}$$

と n を大きくしていくと限りなく 0 に近付いていくことが見てとれます．他にも一般項が $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ の数列 $\{b_n\}$ は

$$b_1 = 2, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = \frac{5}{4}, \quad \ldots, \quad b_{100} = \frac{101}{100}, \quad \ldots \tag{1.2}$$

と n を大きくしていくと限りなく 1 に近付いていくことが見てとれます．このように，n を大きくしていくときに数列がある値に近付くことを次のように定めます．

定義 1.1. 数列 $\{a_n\}$ に対して，n を限りなく大きくするとき，a_n がある一定の値 α に近付くことを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \ (n \to \infty) \tag{1.3}$$

などと表し，数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という．また，α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という．

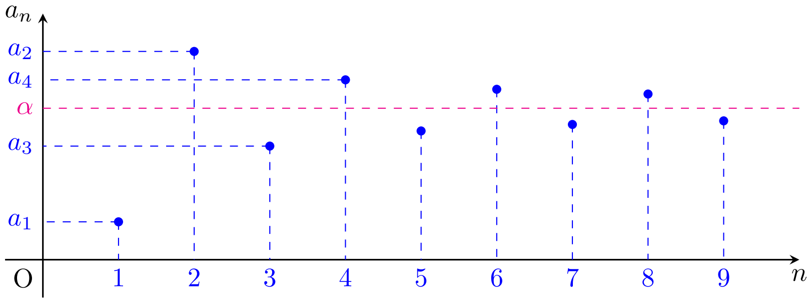

図 1　数列の極限

例 1.2. 一般項が $a_n = \dfrac{1}{n}$ の数列 $\{a_n\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \tag{1.4}$$

である．また，このことを「数列 $\{a_n\}$ は 0 に収束する」「数列 $\{a_n\}$ の極限値は 0 である」という． □

例 1.3. 一般項が $b_n = \dfrac{n+1}{n}$ の数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1 \tag{1.5}$$

である．また，このことを「数列 $\{b_n\}$ は 1 に収束する」「数列 $\{b_n\}$ の極限値は 1 である」という． □

補足 1.4. 数列の極限で大切なことは a_n がどのような値に**近付くか**という点です．$\dfrac{1}{n}$ は n を大きくしていくと 0 に「近付く」だけで 0 となるわけではありませんし，$\dfrac{n+1}{n}$ も n を大きくしていくと 1 に「近付く」だけで 1 となるわけではありません．**つまり，等式**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{1.6}$$

は「『n を限りなく大きくするときの項 a_n の近付き先』が α」という意味であることに注意してください．

問題 1.1. 次のように数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を定めるとき，数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(1) $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$　(2) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$　(3) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$　(4) $a_n = \dfrac{1}{(-2)^n} - 1$　(5) $a_n = 3$

収束する数列の極限について成り立つ次の性質は，数列の極限の計算において重要です．

定理 1.5. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ α, β に収束するとする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\lim_{n\to\infty} (ka_n + \ell b_n) = k\alpha + \ell\beta$　(k, ℓ は定数)
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$
(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　($\beta \neq 0$ のとき)

(1) の k と ℓ はどんな定数でも成り立つので，

- $k = 1, \ell = 1$ とすると $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
- $k = 1, \ell = -1$ とすると $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$
- $\ell = 0$ とすると $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha$[*3]

が成り立つことが分かります．つまり，(1) から収束する数列の和・差・定数倍の極限はバラバラに計算して

[*3] (2) で $b_n = k$ としても得られます．

よいことが分かりますね．また，(2) と (3) から収束する数列の積・商の極限もバラバラに計算してよいことが分かりますね．

例 1.6. 収束する数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$ を満たすとき，

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 1 - 2 = -1, &&\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 1 + 2 = 3, \\ &\lim_{n\to\infty}(3a_n - 4b_n) = 3\cdot 1 - 4\cdot 2 = -5, &&\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1\cdot 3 = 3 \end{aligned} \tag{1.7}$$

が成り立つ．また，これらより

$$\lim_{n\to\infty} a_n(a_n + b_n) = 1\cdot 3 = 3, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{3a_n - 4b_n} = -\frac{3}{5} \tag{1.8}$$

が成り立つ．□

問題 1.2. 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{2}{3^n}\right) \tag{1.9}$$

問題 1.3. α に収束する数列 $\{a_n\}$ を考える．任意の正の整数 k に対して

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^k = \alpha^k \tag{1.10}$$

が成り立つことを k に関する数学的帰納法により示せ．

1.2　発散する数列

ここまでは収束する数列 (極限値をもつ数列) を考えてきましたが，数列はいつでも収束するとは限りません．

例 1.7. 一般項が $a_n = n^2$ の数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad \ldots, \quad a_{100} = 10000, \quad \ldots \tag{1.11}$$

となっており，n をどんどん大きくすると a_n はどこまでも大きくなっていくので，a_n が何らかの値に近付くということはありませんね．数列の項 a_n が何らかの値に近付くときに収束すると言ったのでしたから，この数列 $\{a_n\}$ は収束しないということになりますね．

定義 1.8. 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は**発散する**という．