# 微分方程式入門

会沢修也(すうがくぶんか)

2023年9月26日

0.まえがき ----------3

1.導入----------4

1.1微分方程式とは？ 4

1.2用語や記号の設定 6

1.3ニュートンの運動方程式 6

1.4初期条件 7

1.5数値計算について 8

1.6常微分方程式と偏微分方程式 11

2.解ける1階の微分方程式----------12

2.1変数分離型 12

2.2同次型 15

2.3線型非斉次-定数変化法 16

3.連立線形微分方程式 ----------19

3.1連立方程式を行列で定式化 19

3.2連立方程式の現れる状況 19

3.3解くためのテクニック-行列指数関数 20

3.4行列指数関数のための準備①-級数展開 20

3.5行列指数関数のための準備②-固有値問題と行列の対角化 21

3.6線形連立微分方程式を行列指数関数で解く 24

4.モデル各論----------28

4.0運動方程式の復習 28

4.1バネの単振動 28

4.2抵抗力を考慮した減衰振動 29

4.3外力による強制振動と共振 29

4.4単振り子の等時性(やや難) 31

4.5Lotka-Volterraモデル 33

4.6SIRモデル 35

4.7数理モデルの哲学 36

# 0.まえがき

各章の概要

1.導入

「微分方程式とは何か」という点から始まり、講座の概観を紹介します。
直観的な計算で解ける方程式を見てみて、「微分方程式を解く」ことについても考えてみます。

2.解ける1階の常微分方程式

　微分方程式を解く、ということの難易度はさまざまで、中には解が存在しないものさえ多くあります。一方で、解けるものについての分類もいくつかあって、その手続きも確立されています。ここでは、「解ける方程式をちゃんと解く」ということを目標に、色々なテクニックを学んでいきます。手を動かすことも重要なので、演習しながら進めていきます。

3.連立の線型微分方程式

「2つの未知数に2つの方程式」「3つの未知数に3つの方程式」…といった連立方程式を考えます。特に線形のものは、線形代数を用いることでスッキリと解くことができます。行列の対角化などを復習しながら、解の振る舞いについて見てみましょう。

4.モデル各論

　今までの経験をもとに、具体的な数理モデルに由来する微分方程式について調べてみます。
電気回路や、小中学校の理科の実験で学ぶ「振り子の等時性」などのテーマについて、微分方程式に基づいて説明することができます。

前提知識
高校数IIIレベルの微積分計算がわかること
-計算は丁寧に補うので、基本的な公式を知っている状態であればokです。

以下の知識があると講座をより深く理解できます。これらも必要に応じて補いながら進めます。
・大学レベルの微積分
　べき級数展開や、三角関数の逆関数について知っていると見通しよく計算できることでしょう。
・大学レベルの線形代数(2×2行列の対角化の話)
　第3章で主に用います
・中学-高校-大学で扱う物理
　主に第4章で紹介する話をより深く味わえるようになります。中高で学ぶ物理は何かと公式暗記が多いですが、微分方程式としてモデル化した結果であることが多いです。

# 1.導入

## 1.1微分方程式とは？

微分方程式とはその名の通り、「微分(導関数)の入った方程式」のことです。まずはいくつか例示してみます:

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x + 3$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = y$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -4$

これらの方程式は何をすべき/何を求めろといっている式でしょうか？これから考えたいことを明確にしておきましょう。

**方程式**というとき、すでに知っているものとして1次方程式や2次方程式があるかと思います。例えば、$x^2 + 2x - 3 = 0$という方程式は、「$x^2 + 2x - 3 = 0$**を満たす数xを全て求めよ**」ということを言っています。「試しにx=1を左辺に代入すると0になるから、x=1が答え！」というだけでは不十分で、他にも満たせるxはないか？全て見つけたと言えるかどうか？という点も問題になっているのでした。二次方程式の場合だったら、因数分解や解の公式といった便利なものに頼ればよかったのでした。

微分方程式は少し状況が変わって、「(1)式**を満たす関数y=f(x)を全て求めよ**」というようなことを言っています。細かいことは一旦抜きにして、早速ですが解いてみましょう。

**例1.1**

$\dfrac{dy}{dx} = x + 3$

「微分して$x + 3$になる関数y=f(x)は？」ということが聞かれています。微分の逆=不定積分を使えばよさそうです。

$$y = \int \frac{dy}{dx} dx = \int (x + 3) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

Cは積分定数で、定数ならなんでも良いものです。$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x$だけでなく、$y = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x + 1$なども(1)式をちゃんと満たします。

**例1.2**

$\dfrac{dy}{dx} = y$

右辺にもyが現れており、単にxで積分するだけではダメそうです。式の意味としては、「微分しても変わらない関数は？」ということです。**指数関数**$y = e^x$が思い浮かびます。他にも、その定数倍の$y = 2e^x$, $y = -e^x$など、$y = Ae^x$の形であれば全て解だとわかります。

実は、指数関数の定数倍の他に解はないこともわかります。詳しくは第2章で扱う内容ですが、これは**変数分離**のタイプに分類される微分方程式で、直観的には次のように説明されます: