正井先生からの挑戦状！

微分方程式

$$y''(x) + \exp(x) y(x) = 0 \tag{1}$$

を考える．ここで $\exp(x) = e^x$ である．この微分方程式が

$$y_1(0) = y_2'(0) = 0 \tag{2}$$

$$y_1'(0) = y_2(0) = 1 \tag{3}$$

をみたす二つの解 y_1, y_2 を持つ領域 D を考える（この問題は，x が複素数として成り立つ．しんどい人は x は実数と考え，D は区間とみなして良い）．

さらに D 上で，$y_2(x) \neq 0$ とする．この二つの解を用いて D 上で関数 f を

$$f(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

と定める．

一般に，関数 g に対して

$$\mathcal{S}(g(x)) := \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2$$

と定めるとき，次の問いに答えよ．

1. $\mathcal{S}(f(x)) = 2\exp(x)$ を示せ．
2. $h(x) = \dfrac{2f(x)+1}{f(x)+1}$ と定めるとき，$\mathcal{S}(h(x))$ を求めよ．

ヒント

初手のちょっとしたひらめきのあとは，気合と根性があればどちらも解けます.「気合と根性」の部分をなるべく楽にする皆さんの発想を楽しみにしております.