ベクトル解析・電磁気学入門

株式会社 すうがくぶんか

2025 年後期

第1章

空間ベクトル

空間ベクトルの数学的扱いを準備する。一部高校数学の復習も含む。

1.1　内積

物理での慣習に従い、ベクトルは太字で表す。

$$\text{例 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{F}\ (\text{力}), \mathbf{E}\ (\text{電場}), \cdots$$

ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ のなす角を θ とするとき、$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ の内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ はそれぞれの長さ $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ と $\cos\theta$ の積として定義された。

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

図のように（授業で描きます)、$\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に平行な成分 $\mathbf{a}'$ と垂直な成分 $\mathbf{a}''$ に分解したとき、内積 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}'$ の長さと $\mathbf{b}$ の長さの積になっている。

θ が鈍角の時は $\cos\theta < 0$ となることを考えると、「$\mathbf{a}'$ の長さ」というのは $\theta > \dfrac{\pi}{2}$ の時はマイナスを付けて考えることになる。したがって、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ は正確には「$\mathbf{a}'$ の**符号つき**長さ」と $|\mathbf{b}|$ の積になっている。ここで、符号は $\mathbf{b}$ と同じ向きを正に取っている。

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 《\mathbf{a}' \text{の符号付き長さ}》\times《\mathbf{b} \text{の長さ}》 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

内積は、「仕事」の算出で出てくる。物理での仕事は、

$$\text{力} \times \text{動いた距離} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

だ。ここで、力 $\mathbf{F}$ と物体の変位 $\mathbf{l}$ の向きが異なる場合を考えよう。図（授業で描きます）のように $\mathbf{F}$ を $\mathbf{l}$ と平行な成分 $\mathbf{F}'$ と垂直な成分 $\mathbf{F}''$ に分ける。③は、より詳しく述べれば「力 × 力の向きに動いた距離」であり、垂直な力 $\mathbf{F}''$ については「力の向きに動いた距離」は 0 である。したがって、$\mathbf{F}''$ がした仕事は 0 であり、

$$\begin{aligned}
《\mathbf{F} \text{がした仕事}》 &= 《\mathbf{F}' \text{がした仕事}》 + 《\mathbf{F}'' \text{がした仕事}》 && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}\\
&= 《\mathbf{F}' \text{がした仕事}》 && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}\\
&= 《\mathbf{F}' \text{の長さ}》\times《\mathbf{l} \text{の長さ}》 && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑥}
\end{aligned}$$

となる。

さらに、⑥での「$\mathbf{F}'$ の長さ」は、より詳しくは符号付き長さになるのだ。これは、力と動いた向きが逆の時[*1]は負の仕事をしたと定めるからである。よって⑥は正確には

$$《\mathbf{F}' \text{の符号付き長さ}》\times《\mathbf{l} \text{の長さ}》 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

で、これは内積 $\mathbf{F}\cdot\mathbf{l}$ そのものだ。以上をまとめると、次の式が得られる。

$$《\mathbf{F} \text{がした仕事}》 = \mathbf{F}\cdot\mathbf{l} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

[*1] 向きが逆になるのは、例えば摩擦に逆らって進む場合などがある。

1.2 外積

内積は「ベクトルどうしの積（的なもの）」だが、そういうものにはもうひとつ外積というものがある。外積は 2 本の空間ベクトルから作られるもので、次のように定義される。

空間ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対し、次の条件から定まる空間ベクトル $\mathbf{c}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の**外積**といい、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ と書く。

1. $\mathbf{c}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の両方と直交する。
2. $\mathbf{c}$ の大きさは、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が張る平行四辺形の面積に等しい。
3. $\mathbf{c}$ の向きは「右ネジの向き」、すなわち「$\mathbf{a}$ の向きから $\mathbf{b}$ の向きに右ネジを締める向きに回すとき、ネジが進む向き」で定める。$\mathbf{a}$ が東向きで $\mathbf{b}$ が北向きの時、$\mathbf{c}$ は鉛直上向きになる。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$$

以下、外積の性質を証明抜きで述べる。

外積は分配法則と、実数倍に対する結合法則をみたす。

1. $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\times\mathbf{y}+\mathbf{x}\times\mathbf{z}$
2. $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z}=\mathbf{x}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}$
3. $(k\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{x}\times(k\mathbf{y})=k(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$

こういう点は外「積」という名前が非常にしっくり来るだろう。一方、外積が普通の積とは大きく異なるのが、**交換法則がなりたたない**という点だ。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a} \quad \cdots\cdots ⑨$$

つまり、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を入れ替えると外積 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は符号が反転するのだ。これにより特に、同じベクトルどうしの外積は $\mathbf{0}$ になる。

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0} \quad \cdots\cdots ⑩$$

ここから更に $\mathbf{a}$ と $k\mathbf{a}$ の外積も $\mathbf{0}$ になるとわかるから、

平行なベクトルどうしの外積は必ず $\mathbf{0}$ になる

という法則がなりたつ。

外積を x, y, z 成分を用いて計算すると次のようになる。$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \mathbf{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ とすると、

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ⑪$$

外積の定義により $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ とも $\mathbf{b}$ とも垂直だから、次の式が常になりたつ。

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0 \quad \cdots\cdots ⑫$$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0 \quad \cdots\cdots ⑬$$

より一般に、3 つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ から内積と外積を組み合わせて $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$ のようなものを作ると、これは $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ の入れ替えに対して次のような対称性を持つ。

$$\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}\times\mathbf{z})=\mathbf{y}\cdot(\mathbf{z}\times\mathbf{x})=\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) \quad \cdots\cdots ⑭$$

内積と外積が大きく異なるもう 1 つの点は、「計算結果が何か」ということである。内積は、2 つのベクトルから 1 つの**実数**が得られる演算だった。一方外積は、2 つの空間ベクトルから 1 つの**空間ベクトル**を得る演算である。

内積　$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ ……… 計算結果は**実数**
外積　$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ……… 計算結果は**ベクトル**

外積は、物理では角運動量やトルクなどに現れる。ここでは、本講座に関連の深いローレンツ力に触れておく。電荷 q を持つ物体（質点）が速度 $\mathbf{v}$ で運動しているとき、電気・磁気（電磁気）から受ける力 $\mathbf{F}$ は、

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑮}$$

と表される（**ローレンツ力**）。ここで、$\mathbf{E}$ は**電場**と呼ばれるベクトル、$\mathbf{B}$ は**磁場**と呼ばれるベクトルで、いずれも電荷（を持つ物体）がある場所によって決まっている。$\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の部分が外積になっている。

電場 $\mathbf{E}$ や磁場 $\mathbf{B}$ の性質や法則を調べるのが電磁気学という分野である。

3 つのベクトルの組み合わせで、$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ の形のものはまだ見ていなかった。外積の計算結果はベクトルになるから、このような計算はちゃんと意味を持つ[*2]。この場合は、次のような等式がなりたつ。

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑯}$$

これは全然自明な等式ではない。$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の成分をおいて⑯の左辺・右辺を別々に計算してみて、⑯がなりたつことを確かめることはよい腕試しになるだろう。

⑯から、外積については結合法則もなりたたないことがわかる。つまり

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

である。したがって、$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ のような表式では括弧は省略できない。

1.3 ベクトル場と力線

今しがた述べた通り、電場 $\mathbf{E}$ や磁場 $\mathbf{B}$ は場所（点）ごとに決まっているベクトルである。これらは、その点に電荷があるかないかとは無関係に、すべての点に対して存在しているベクトルである。それが、「〜場」という名前の由来だ。空間内のどこの点にも存在しているようなものを「〜場」と言うのである。したがって、電場 $\mathbf{E}$ や磁場 $\mathbf{B}$ は点の座標 x, y, z および時刻 t ごとに決まるベクトルなので、t, x, y, z の関数として $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ や $\mathbf{B}(t, x, y, z)$ のように表すことができる。

$\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ は、それぞれの場（の源になっている他の電荷たち）に影響を及ぼさない条件のもとで、時刻 t、座標 (x, y, z) の点に電荷を置いたとしたらはたらく力を⑮によって定めるようなベクトルだと考えればよい。

電場や磁場のような**ベクトル場**を視覚的に表す方法は、図（授業で描きます）のように空間内の各点ごとにその点での場の強さと向きを表す矢印を描き並べることである。実際には無限個の点から無限個の矢印が生えているが、その通りに無限個の矢印を描いてしまうと人間には認識できなくなってしまうので、適当な有限個の点を見繕って、そこから有限本の矢印が生えている図でおおよその様子を表している。

さらに、その矢印たちを滑らかにつないで、どこでも矢印に接しているような曲線を描くことができる。ありとあらゆる点を通る曲線たちが存在するが、そのすべてを描くと図全体が曲線で塗りつぶされて真っ黒になってしまうので、適当な有限本の曲線でおおよその様子を表す。このような曲線を**力線**という。力線もベクトル場の表現方法のひとつである。電場の力線を電気力線、磁場の力線を磁力線ということもある。

1.4 ベクトル場の流束

ベクトル場として電場や磁場より恐らく直感的にイメージしやすいのは、気体や液体の速度の場だろう。水が川に沿って流れているとき、水中の各点ごとに「その場所で水がどんな速度で進んでいるか」がベクトル $\mathbf{v}$ として決まるが、これが速度ベクトル場を定める。川が急に曲がっている付近では、場所ごとに $\mathbf{v}$ の向きや大きさは大きく変わる。

単位時間当たりにどれくらいの水量が運ばれるか？これを算定する上で基礎的な量となるのが**流束**と呼ばれるものだ。流束の説明のため、まずは単純で扱いやすい、一様な速度ベクトル場から考えていこう。

図のように（授業で描きます）、速度ベクトル $\mathbf{v}$ がどこの点でも変わらない一定のベクトルであるとする。$\mathbf{v}$ と垂直な面[*3]を取り、その面積を ΔS とするとき、Δt の時間の間にその面を通過する水の量（体積）は $|\mathbf{v}|\Delta S \Delta t$ になる。よって、

[*2] これに対し、$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ のような表式は意味を持たない（そういう計算はできない）。内積 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ の計算結果は実数であり、それと $\mathbf{a}$ との外積というものは定義されない（計算できない・意味を持たない）からだ。

[*3] この面は想像上のものであり、水の流れを一切妨げないとする。

速度ベクトル場 $\mathbf{v}$ によって流れる水量は「単位面積、単位時間当たりの量」で特徴づけることができて、その値は $|\mathbf{v}|$ で与えられることになる。

今の話は、「水が通過する面」と速度ベクトル $\mathbf{v}$ が直交する場合を考えていた。直交しない場合は話が変わってくる。それが一番はっきりするのは、$\mathbf{v}$ が面に平行な場合だ。その場合は「面を通過する水量」が 0 になることは明らかだろう。通過面と垂直な単位ベクトル（単位法線ベクトル）を $\mathbf{n}$ とすると、

$$《単位面積、単位時間当たりに通過する水量》= \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑰$$

と内積で表される。$\mathbf{v}$ と面が直交する場合は $\mathbf{v}$ と $\mathbf{n}$ は同じ向きとなり、⑰は $|\mathbf{v}|$ となって先ほどの結果と一致する（実際には、面には向きをつけて考えるので、$\mathbf{n}$ は $\mathbf{v}$ と逆向きになることもある。その場合は ⑰ $= -|\mathbf{v}|$ である。面に向きをつけることが自然で合理的であることは、後でガウスの定理を扱うときに理解できる）。

一般には、$\mathbf{v}$ は一様ではなく、場所ごとに異なるベクトルである。このような場合も、水が通過する面をうんと小さく取り、そのごく近傍だけに着目すれば、その範囲内では $\mathbf{v}$ はほぼ一定と見なせる。したがって、単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ を持つ微小面積 ΔS を微小時間 Δt の間に通過する水量は $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\Delta S\Delta t$ と表せる。よって、⑰は $\mathbf{v}$ が一様ではない一般の場合にもそのままなりたつ。

電場 $\mathbf{E}$, 磁場 $\mathbf{B}$ の場合は、流体の速度場 $\mathbf{v}$ と違って、何かが実際に「流れて」いる様子を表しているわけではない。しかし、イメージ的にそれが何かの流れだと思うと（流れであるかのように思うと）、⑰と同様に「単位面積、単位時間当たりに通過する量」が $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$ や $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}$ で表されることになる。後の章で、この比喩的イメージが生かされる場面にまた出会うだろう。