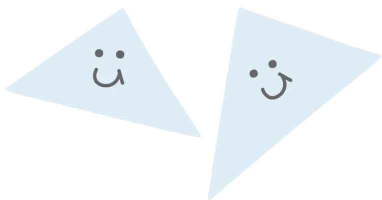
統計・機械学習のための高校数学

すうがくぶんか

2026 年前期



はじめに

わたしが強調したいのは,
数学的知識の解釈が高度に創造的な活動であるということである.
ある意味, 数学は自然と人類に関する小説なのである.
——ユーリ・I・マニン『暗喩としての数学』

数学とは不思議な言葉であり, その響きから不快さ, 辛さ, 苦い記憶を連想する人もあれば, 歓び, 興奮, 熱狂, あるいは美を感じる人さえいます. それも, およそ数学の教育と呼べるものを経験したことのある人ならば, その程度や環境に差異はあれど, 洋の東西を問わず, また老いも若きも関係なく, です. この文章を読んでいるあなたは, どのような感情を抱いておられるのでしょうか. それはネガティブでしょうか, ポジティブでしょうか. あるいは "愛憎入り混じる" でしょうか.

とはいえ, このテキストを手に取られた方ならば, 数学が必要だと感じているか, または数学に興味を抱いているか, あるいはその両方であられることと思います. さまざまな理由から数学を学ぶ, あるいは学び直すことはあなた自身にとってきっと役立つことなのでしょう. さて, "数学を学ぶ" と決めたわれわれは, まず何から始めればよいのでしょうか. 試みに, 2025 年 12 月現在の生成 AI へ「数学に興味があります。どのような分野がありますか。」と聞いてみましょう. 次のような回答が返ってきました：

....

数学の世界へようこそ！ 素晴らしい興味ですね。 数学は単なる「計算」ではなく、**「宇宙や社会の仕組みを記述する言語」**であり、非常に広大で美しい世界です。

大きく分けると、数学は**「純粋数学」（理論そのものを探求する）と「応用数学」**（現実世界の問題を解決する）に分類されますが、現代ではこれらが密接に絡み合っています。

主要な分野をわかりやすく整理しましたので、どのあたりに惹かれるかイメージしながら見てみてください。

1. **代数学** (Algebra)

キーワード：構造、方程式、対称性

数字の代わりに文字を使って方程式を解くだけでなく、「数や図形の背後にあるルールや構造」を研究する分野です。

- **整数論**: 「素数」の謎や、フェルマーの最終定理のような数そのものの性質を探求します。数学の女王とも呼ばれます。
- **群論（ぐんろん）**: ルービックキューブや結晶の構造など、「対称性」を数学的に記述します。
- **線形代数**: ベクトルや行列を扱います。現代の AI（人工知能）や CG 技術の基礎となる非常に重要な分野です。

2. **幾何学** (Geometry)

キーワード：形、空間、曲がり方

「空間とは何か？」「形とは何か？」を追求する分野です。

- **ユークリッド幾何学**: 三角形や円など、馴染み深い図形の性質を扱います。
- **トポロジー (位相幾何学)**: 「柔らかい幾何学」と呼ばれます。ドーナツとマグカップを同じ形（穴が一つ）とみなすように、連続的に変形しても変わらない性質を調べます。
- **微分幾何学**: 曲がった空間（曲面）の上での幾何学です。アインシュタインの相対性理論（重力によって空間が歪む）の記述に使われています。

3. **解析学** (Analysis)

キーワード：変化、極限、無限

「動き」や「変化」を捉える分野です。高校で学ぶ微積分が入り口になります。

- **微分積分学**: 変化の瞬間（微分）や積み重ね（積分）を扱います。ロケットの軌道計算から経済の変動予測まで幅広く使われます。
- **複素解析**: 虚数 i ($i^2 = -1$) を含む複素数の世界での微積分です。非常に美しい定理が多く、物理学や工学で必須のツールです。
- **微分方程式**: 自然現象（熱の伝わり方、波の動き、感染症の流行など）を数式で表して解明します。

4. **応用数学・情報系** (Applied Mathematics)

キーワード：データ、論理、アルゴリズム

コンピュータや現代社会と直結する分野です。

- **確率論・統計学**: 不確実な未来を予測したり、大量のデータから意味のある情報を引き出したりします。
- **離散数学**: コンピュータが扱う「0 と 1」のような、飛び飛びの値を扱います。プログラミングや暗号理論の基礎です。
- **ゲーム理論**: 相手がいる状況で、どのような戦略をとるのが最適かを数理的に分析します。経済学や生物学でも使われます。

……………………………………………………………………………………

なるほど, 聞いたことのあるような言葉もあれば, まったく意味のわからない言葉もあります.「宇宙や社会の仕組みを記述する言語」とは生成 AI らしいなんとも壮大な話です. ここまで人間らしい文言を生成できるようになった AI 技術の背後では, さまざまな数学理論がその働きを支配していますし, その他にも科学技術や情報技術に支えられている昨今の社会において, これらの数学がたいへん役に立っているのだろうとは想像できます. しかし, これらを一から十まで完璧に学ぼうと考えると, 正直なところ途方に暮れてしまいます. 膨大すぎて文字通り何から手をつけたものか, ほとほと見当がつきません.

「数学」と風呂敷を広げすぎたのがいけなかったのでしょうか. 大学レベルの分野も混じっているようです. そこで数学の入門編として "高校数学" に限ってみるのはどうでしょう. 今度は「高校数学で扱われている分野にはどのようなものがありますか。なるべく網羅的に教えてください。」と聞いてみます：

……………………………………………………………………………………

高校数学の世界へようこそ。 日本の高校数学は非常に体系的に構成されており、**「代数」「幾何」「解析」「統計」**の 4 つの柱が、基礎から応用へと積み上がるように設計されています。

現在は 2022 年度から始まった**「新課程」**が適用されていますので、最新のカリキュラム（数学 I, II, III, A, B, C）に基づいて、なるべく網羅的に整理しました。

大きく 5 つのカテゴリーに分けて解説します。

1. **数と式・論理** (Numbers, Logic & Algebra)

計算の基礎や、論理的な思考力を養う分野です。

- **数と式** (I): 因数分解、実数（有理数・無理数)、根号（$\sqrt{}$）の計算、1 次不等式。
- **集合と論理** (I): 「かつ」「または」「ならば」といった論理的推論、必要条件と十分条件、背理法。
- **複素数と方程式** (II): 2 乗してマイナスになる数「虚数 (i)」の導入。高次方程式（3 次以上の方程式）の解法。
- **数学と人間の活動** (A): 整数の性質（約数・倍数、ユークリッドの互除法、n 進法）や、パズル的な要素。※旧課程の「整数の性質」が再編されたものです。
- **行列** (C): **【注目】** 長らく高校数学から消えていましたが、新課程で復活しました。数字を並べた「行列」の計算や、一次変換を扱います。

2. **関数** (Functions)

「変化する 2 つの数量の関係」をグラフや式で捉えます。

- 2 **次関数** (I): 放物線 ($y = ax^2 + bx + c$) のグラフ、最大・最小問題、2 次不等式。
- **三角比** (I): 直角三角形の比（サイン・コサイン・タンジェント)。測量などに応用されます。
- **指数関数・対数関数** (II): 急激に増える数（2^x など）や、桁数を扱う対数（log）の計算。
- **三角関数** (II): 三角比を円運動や波の動き（$y = \sin\theta$）へと拡張したもの。加法定理などの公式を学びます。

3. **図形と空間** (Geometry & Vectors)

形そのものの性質や、空間内での位置・動きを扱います。

- **図形の性質** (A): 三角形の五心（重心・外心など)、円の性質（方べきの定理など)、作図。
- **図形と方程式** (II): 座標平面上で図形を扱います。円の方程式 ($x^2 + y^2 = r^2$) や、軌跡と領域。
- **ベクトル** (C): 「大きさと向き」を持つ量。平面ベクトルと空間ベクトルがあり、物理学の基礎となります。※旧課程では数学 B でしたが、C に移動しました。
- **複素数平面** (C): 複素数を座標平面上にプロットし、回転や拡大・縮小を幾何学的に扱います。
- **式と曲線** (C): 楕円、双曲線、放物線などの「二次曲線」や、媒介変数表示、極座標。

4. **微分・積分** (Analysis / Calculus)

現代科学の基盤となる、高校数学の山場です。

- **微分法・積分法** (II): 主に「整式（x^2, x^3 など)」を対象にします。接線の傾き（微分）や、面積（積分）を求めます。
- **極限** (III): 「限りなく近づく」という概念 (lim)。無限級数（無限に足し合わせるとどうなるか）な

どを扱います。

- **微分法・積分法** (III):　対象が「すべての関数（三角・指数・対数関数など）」に広がります。合成関数の微分や置換積分・部分積分など、高度な計算技術と、体積や曲線の長さへの応用を学びます。※数学 III は主に理系選択者が学びます。

5. **データの分析・確率・統計** (Data, Probability & Statistics)
データ社会に対応するため、近年特に重要視されている分野です。
- **データの分析** (I):　平均値、中央値、分散、標準偏差、相関係数、箱ひげ図、散布図。データの特徴を掴みます。
- **場合の数と確率** (A):　順列 ($_n\mathrm{P}_r$)、組み合わせ ($_n\mathrm{C}_r$)、条件付き確率、期待値。
- **統計的な推測** (B):　母集団と標本、正規分布、区間推定、仮説検定。少ないデータから全体を推測する手法です。

....

どうも AI が気を遣ってくれたようで, 各学年ごとではなく, 内容に繋がりのある分野ごとにまとめてくれたことで見通しが良くなりました. 内容にはやや怪しいところもありますし, カリキュラム改訂の噂もある昨今ですから, あくまで参考程度に捉えてください. 難易度は先ほどより少しはましに思えますが, やはりゼロからすべてを学ぶのはそれなりに骨が折れそうです. もちろん標準的な高校生は 3 年間ほとんど毎日数学を学ぶ時間があるわけですから, 考えてみれば当然の話です.

紀元前 300 年頃のエジプトはアレクサンドリアにて, 時のファラオ, プトレマイオス 1 世に幾何学を教えていたユークリッドは, 数学を学ぶ簡単な方法はないものかと尋ねられます. “幾何学に王道なし” とはこのときユークリッドがファラオに言い放った言葉だと言い伝えられています. 真偽の程は定かではありませんが, なるほど, 結局のところ “王道” あるいは “ショートカット” などは存在せず, 地道に学ぶしかないという教えのようです. これは受け入れざるを得ないでしょう.

とはいえ, むやみやたらと突撃することが常に得策とも限らないものです. そこでわれわれは次のような戦略を採ります. すなわち, 高校数学で扱われている単元の中から, 統計学を深く理解するのに重要な部分をピックアップして学んでいくのです. 特に, 統計学を学ぶなら欠かせない**確率**の分野に加え, ありとあらゆる自然科学・社会科学において極めて基本的な役割を果たす**微分法**および**積分法**, **ベクトル**の分野, あらゆる数理的処理の根幹をなす線形代数を学ぶための嚆矢として**行列**の理論の初歩に注力することにします.

先ほどの生成 AI の話を信ずるならば, 高校数学は主に代数・幾何・解析・統計分野からなっているとのことでした. 統計分野に注力するということは, 他の分野の学習は疎かになってしまうのでしょうか. その点においても, これは悪い作戦ではないようです. ニコラ・ブルバキによる『数学原論』という著作があります. 現代数学のありとあらゆる分野を最小限の仮定から厳密に組み立てようとする書籍ですが, その原題はフランス語で “Éléments de mathématique” であるといいます. ここで “mathématique” は単数形なのです. 英語での mathematics と同様に mathématiques という複数形がちゃんと存在します. これはブルバキの “数学はひとつである” という信念に基づくものだそうです. 実際, このテキストもしばしば本筋の確率や統計, 解析と関連する数学を学ぶために, 代数や幾何の言葉を何度も借りることになります. ひとつの大きな目標に向かって勉強を進めていると, いつのまにか小さな知識もどんどん増えていき, 結局は高校数学の中でも多くの部分に触れることになるという寸法なのです. 数学や数式に苦手意識を持っているあなたも, この講座を修了するころにはきっとそのイメージが大きく変わることでしょう.

結局, 数学の美しさとは何なのでしょうか. “自然と人類に関する小説” にはどんな響きのどんな言葉で, どんな物語が記されているのでしょうか. 世の中に無視できない人数が存在するという, 数学に熱狂する人々は, 本当のところ数学に対してどんな思いを抱いているのでしょうか. その答えには, 数学を自分で体感してみることでしか, たどり着くことはできないようです. 本講座を通じて, 社会に役立つ数学の最たる例である統計学を見据えたさまざまなテーマの数学に遭遇します. みなさんが実際に論理を追い, 問題を解くうちに, 単なる “役立つ” を超えた, 自然と人類についての思わせぶりな問題に対する解答の一端に触れられることを願っております.

このテキストについて

高校数学に限らず, 数学をきちんと身につけるためには演習問題を多くこなしていくことが不可欠です. そのためこのテキストにはさまざまな問題が含まれています. 講義中に扱うものもありますが, 時間の都合上扱えない問題に関しても, 紙とペンを使って取り組んでみましょう.

テキストの解説は, 可能な限り (箇所によっては冗長すぎるほど) 丁寧に行いました. なるべく天下り的な記述を排し, 読者に数学的思考の流れを体感してもらうための工夫としてご寛恕を請いたいと思います.

第 1 章では**確率**について扱います. 統計について本格的に学ぶならば避けて通れない単元です. 素朴な数え上げの問題から始め, 順列と組み合わせおよび基本的な確率の計算に習熟しましょう. また, 確率の現代的な取り扱いには欠かせない確率変数と確率分布の概念にも触れます.

第 2 章では**指数関数**や**対数関数**について扱います. 指数の概念を, 自然数よりも広い範囲の数に拡張することから始め, 指数関数の定義と性質を学びます. また幅広い分野において重要であり, 指数関数の逆関数であると考えられる対数関数について詳しく学びます.

第 3 章では**微分法**について扱います. 歴史的には物理学の要請から産まれたこの概念は, “変化” を捉えるもっとも優れた方法として現代に至るまで数学の中心的な話題の一角です. その考え方をやさしく導入し, アイデアと計算の双方への理解を深めます.

第 4 章では**積分法**について扱います. 複雑な面積を求めるための有用な概念ですが, 実は微分法とおおいに関連があります. 統計で必要となる広義積分など高校数学の範疇を超えた内容にも触れます.

第 5 章では**ベクトル**について扱います. 数学, 物理学, 工学, データサイエンス, 情報理論など, 文字通り数え切れないほどの分野に応用が見出せる重要概念です. 定義と基本性質および内積とベクトルの大きさの概念を中心に取り扱います.

第 6 章では**行列**について扱います. 一見するとただの数表のようにも見えますが, 数学を実社会に応用する際には真っ先にお声がかかる重要概念です. 上述のベクトルとも関係が深く, 統計学を学ぶ上でもその初歩を理解しておくことは極めて役に立ちます. その初歩的な取り扱いについて学びます. 生成 AI の動作原理にも深く関わっています.

このテキストを読むとわかるようになること

たとえば, 以下のような数式が理解できるようになるでしょう.

- **東京大学教養学部統計学教室編**, **『基礎統計学 I 統計学入門』**, **東京大学出版会**, **初版** 1991 **年**, p.91.

> 数学的に扱いやすい連続型の確率分布として, 後でくわしく述べる**指数分布** exponential distribution がある. $\lambda > 0$ として
>
> $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0),\ 0\ (x < 0)$$
>
> とすると, $f(x) \geq 0$ で
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1$$
>
> と規格化されているから, 確率分布の性質を満たす. 定積分をしてみると
>
> $$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$
>
> ということがわかる.

- **甘利俊一**, **『情報理論』**, **筑摩書房**, 2011 **年**, p.20.

> ここで, 状況の不確定度を表わす量を定義しておくと, 後の議論に都合がよい. これが**エントロピー**であり, 次のように定める.
>
> **定義 1.2**　n 個の事象がそれぞれ確率 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ で発生するとき, どれが発生したかの不確定度を
>
> $$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$
>
> と定義し, これをエントロピーと呼ぶ.

- **菊田遥平**, **『原論文から解き明かす生成 AI』**, **技術評論社**, 2025 **年**, pp.28-29.

> これを解決するための方向性として分散表現 (distributed representation) がある。これは各次元に連続的に分布したベクトルとして表現するものである。例えば、トークンの情報を表すのに必要な次元が $\mathbb{R}^{\log_2 |\mathcal{V}|}$ (ここで扱っている例では $\mathbb{R}^{\log_2 4} = \mathbb{R}^2$) 程度であると仮定して、以下のような分散表現を考えよう。
>
> $$\mathbf{d}_{\text{物理学}} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_{\text{数学}} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_{\text{人文学}} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_{\text{社会学}} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$
>
> この場合、$\mathbf{d}_{\text{物理学}}$ と $\mathbf{d}_{\text{数学}}$ の距離は $\mathbf{d}_{\text{物理学}}$ と $\mathbf{d}_{\text{人文学}}$ との距離よりも小さい、つまり類似度は高い、ということを表現できる。

あくまでこの講義では数学的内容のみを取り扱いますから, それぞれの数式の意味をこえた内容の理解には各分野の学習が必要です.

記号などについての約束

- **自然数** (natural number) といえば, $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ のように, 離散的な物を数えるときに用いる数のこととします. 日本の高校までの数学の授業では 0 を含めないとすることがほとんどですから, このテキストでもその流儀に従うこととしますが, 一般的には 0 を含むことも多いので注意してください. 自然数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ という文字で表します.
- **整数** (integral number) といえば, $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ のように, 自然数全体に加えて, それにマイナス記号をつけた数および 0 のこととします. あらゆる自然数は整数でもあります. 整数全体のなす集合を $\mathbb{Z}$ という文字で表します. ドイツ語の Zahlen (数) に由来します.
- **有理数** (rational number) といえば, 整数 a, b を用いて

$$\frac{a}{b}$$

のような分数として表すことができる数のこととします. ただし $b \neq 0$ です. どんな整数 m も $m/1$ という分数で表せますから, あらゆる整数は有理数でもあります. 有理数は小数で表示することができ, その小数点以下の数は有限桁になるか, 無限桁であったとしても必ず同じ数字列の循環になります. 有理数全体のなす集合を $\mathbb{Q}$ という文字で表します. Quotient (独), quoziente (伊), quotient (英) (いずれも商) などに由来します.
- **実数** (real number) といえば, 有理数全体に加えて, 小数で表示したときに無限桁であり, 同じ数字列の循環には決してならないような数も含めた数のこととします. このような数を**無理数** (irrational number) といいます. 実数は有理数と無理数を合わせた数の範囲ともいえます. 実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$ という文字で表します.
- 「$P := Q$」は, 「P を Q で定義する」あるいは「P の定義は Q である」を意味します.
- 網掛けで このように囲まれた部分 は, 進んだ内容や細かい注意点, 通読に際して必ずしも必要ではない事項などについて述べています. 初読の際はあまり気にせず読み飛ばして構わないものもあるので, 適宜拾い読みしてください.
-  は「危険な曲がり角[*1]」, つまり, 誤解しやすく注意が必要な箇所であることを表します.

[*1] この記号はニコラ・ブルバキ (Nicolas Bourbaki) によるものです. ブルバキは 1939 年頃より長大な『数学原論』を著し, 数学を基礎から厳密に構築することを試みた数学者とされています. 実際には複数の著名な数学者らによる合同ペンネームであり, いわば架空の数学者です.

第 *1* 章　場合の数と確率

「サイコロのそれぞれの目が、実際に《同じ確からしさ》で出るかどうか——
数学は、その問いには答えない。
ただ《同じ確からしさ》で出ると見なすなら、いったい何が成り立つか——
数学は、その問いに答えてくれる」
——結城浩『数学ガール／乱択アルゴリズム』

■ 統計学への応用を見据えたとき, 高校数学の中で最も重要なトピックとして立ち上がってくるのは**確率**の分野でしょう. 本章では与えられた条件を満たすパターンをモレなくダブりなく正しく数え上げる方法, いわゆる**場合の数**の問題の考察からはじめて, 現代的な確率の理解の基礎となる**確率変数**や**確率分布**の概念を理解することを目指します.

1.1　場合の数

与えられた条件を満たすパターンの総数を数え上げることは, 確率の計算の基礎となります. この「条件を満たすパターンの総数」を**場合の数**といいます. 原理的には丁寧に数えていけばどんな問題にも正解できるはずですが, パターンが膨大な場合や複雑な条件がついている場合, あるいはその両方を考慮しなければならないとき, どのように考えるのがよいでしょうか.

1.1.1　モレなくダブりなく数え上げる

次の素朴な問題から始めましょう.

問題 1.1.1
大小 2 個のさいころを投げる. 目の和が 5 の倍数になる場合は何通りあるか.

解答
大のさいころの目が a, 小のさいころの目が b であることを (a,b) のように表すことにする.

- **目の和が 5 の場合**　$(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ の 4 通り.
- **目の和が 10 の場合**　$(4,6),(5,5),(6,4)$ の 3 通り.

目の和が 5 の場合と目の和が 10 の場合が同時に起こることはないから, 合計で $4 + 3 = 7$ 通り. □

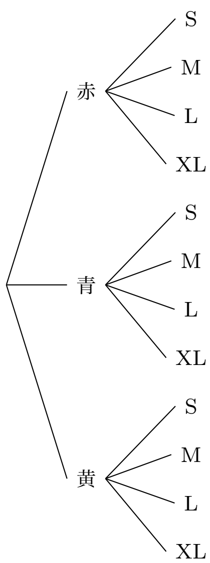
このように書き出して数え上げることはすべての基本です. 可能な限り規則的に書き出し, 数え漏らしや二重に数えてしまうことを防ぎましょう. 上の解答では大のさいころの目を 1 ずつ大きくしていき, それに対応する小のさいころの目を決めていく, という順番で数えています. 闇雲に書き出すことはミスの温床です.

次の問題はどうでしょうか.

問題 1.1.2
ある店舗で T シャツを選んでいる. 色は赤, 青, 黄の 3 色, サイズは S, M, L, XL の 4 サイズから選ぶとする. このとき, T シャツの選び方の総数は何通りあるか.

解答

樹形図 (tree) を書いて調べてみる. まずは色を決めて, その後にサイズを選ぶことにする.



赤色を選択したとき, サイズは S, M, L, XL の 4 通りの可能性がある. 青色を選択したとき, 黄色を選択したときも同様に 4 通りの可能性がある. よって $4 \times 3 = 12$ 通り. □

樹形図はこのような問題に対して極めて有効です. 樹形図の形が赤, 青, 黄ですべて同じですから, $4 \times 3 = 12$ と求めることができたわけですね. これらの考察から次の事実が導かれます.

定理 1.1.3 (和の法則と積の法則)

和の法則　事柄 A の場合の数が a 通り, 事柄 B の場合の数が b 通りあるとする. また, この 2 つは同時には起こらないとする. このとき A または B のどちらかが起こる場合の数は $a + b$ 通りである.

積の法則　事柄 A の場合の数が a 通りあり, そのそれぞれに対して事柄 B の場合の数が b 通りあるとする. このとき A の起こり方と B の起こり方のペアは ab 通りである.

とても基本的な事実ですが, 確率の問題を解く際にも鍵となる重要な性質です. 和になる場合と積になる場合を混同しないようにしましょう. 積の法則における“そのそれぞれに対して”という部分は, 上図のように“同じ形の樹形図が並んでいる”という状態に対応しています.

それでは, 次の問題を解いてみましょう.

演習 1.1.4

(1) 大小 2 個のさいころを投げる. 目の和が 4 の倍数になる場合は何通りあるか.

(2) $(a+b)(c+d)(e+f+g)$ を展開したとき, 項はいくつ現れるか.

解答

(1) 2 個のさいころについて, それぞれ 1 から 6 の目が出るから, その和は 1 から 12 である. その中で 4 の倍数は, 4, 8, 12 の 3 つである. それぞれの場合に分けて数え上げる.

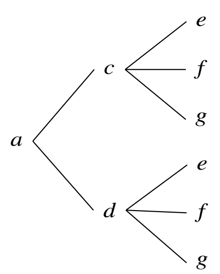
- **目の和が 4 の場合**　$(1,3),(2,2),(3,1)$ の 3 通り.
- **目の和が 8 の場合**　$(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$ の 5 通り.
- **目の和が 12 の場合**　$(6,6)$ の 1 通り.

よって, 合計で $3+5+1=9$ 通り.

(2) **分配法則**を用いて,

$$(a+b)(c+d)(e+f+g) = ace + acf + acg + ade + \cdots$$

と展開してもよいが, 最初に a を選んだとして樹形図を描いてみると,



となる. 最初に b を選んだ場合も樹形図の形は同じはずである. 最初の括弧からは a と b の 2 通りの選び方があり, そのそれぞれに対して, 2 つ目の括弧からは c, d の 2 通りの選び方があり, そのそれぞれに対して, 3 つ目の括弧からは e, f, g の 3 通りの選び方がある. よって, 項の数は $2\times2\times3=12$ 個である.

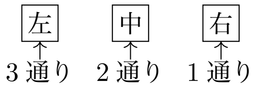
1.1.2　順列

積の法則の応用として計算できる典型的な場合の数に, 順列と組み合わせがあります. 特に組み合わせの計算は二項分布など統計学の重要なポイントで何度も登場しますが, その理解のためにまずは順列から確認していきましょう.

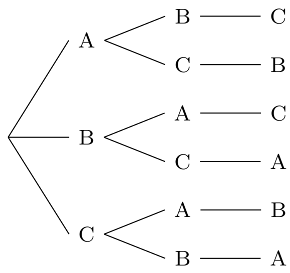
> **定義 1.1.5 (順列)**
> 異なる n 個のものから r 個を選び, 順序をつけて並べる並べ方を**順列** (permutation) という. その総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と表す.

例 1.1.6

A, B, C の 3 人を一列に並べることを考える．このとき並べ方の総数, すなわち ${}_3\mathrm{P}_3$ を求めてみよう．一番左に並ぶ人として, A, B, C の 3 人の可能性がある．この 3 人の中から誰か 1 人を決めると, その選び方それぞれに対して, 中央に 2 人の可能性があり, さらにそのそれぞれに対して一番右に 1 人の可能性がある．



よって, $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通りである．次のように樹形図を用いて,



としてもよい．すなわち,

$$ {}_3\mathrm{P}_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6 $$

が成り立つ．同様に,

$$ {}_4\mathrm{P}_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24, $$

$$ {}_5\mathrm{P}_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 $$

である．

これを踏まえて次のような定義をしましょう．

定義 1.1.7 (階乗)

自然数 n に対し,

$$ n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 $$

と定める．ただし, $0! = 1$ であるとする．$n!$ を n の**階乗** (factorial) という．

命題 1.1.8

n 個のものを並べる方法は $n!$ 通り存在する．すなわち,

$$ {}_n\mathrm{P}_n = n! $$

である．

例 1.1.9
では, A, B, C, D の 4 人から 3 人を選んで一列に並べる方法, すなわち ${}_4\mathrm{P}_3$ を求めよう．先ほどと同様に一番左には 4 人の可能性がある．この 4 人それぞれに対して 3 人, そのそれぞれに対して 2 人の可能性がある．よって $4\times3\times2=24$ である．すなわち,

$${}_4\mathrm{P}_3 = 4\times3\times2 = 24$$

が成り立つ．同様に,

$${}_5\mathrm{P}_3 = 5\times4\times3 = 60$$

である．

すなわち, ${}_n\mathrm{P}_r$ とは, “$n!$ を r 個で止める” という計算に他なりません．これを数式で表現するにはどのようにすればよいでしょうか．

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(r-1))\times(n-r)\times(n-(r+1))\times\cdots\times3\times2\times1$$

です．最初の “r 個” とは,

$$\overset{①}{n}\times\overset{②}{(n-1)}\times\overset{③}{(n-2)}\times\cdots\times(n-\overset{ⓡ}{(r-1)})$$

を指します．つまり, 後半の

$$(n-r)\times(n-(r+1))\times\cdots\times3\times2\times1 = (n-r)!$$

を打ち消してしまえばよいわけです．$n-(r-1)=n-r+1$ に注意すると, 以下が成り立つことがわかります．

> **定理 1.1.10 (順列の計算)**
> 異なる n 個のものに対して,
>
> $${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$
>
> が成り立つ．

早速計算してみましょう．

演習 1.1.11

(1) 1 から 6 までの数字がひとつずつ書かれた 6 枚のカードがある．このカードを並べて作ることができる 3 桁の整数は何通り存在するか．ただしカードに書かれた数字は全て異なるものとする．
(2) 0 から 3 までの数字がひとつずつ書かれた 4 枚のカードがある．このカードを並べて作ることができる 3 桁の整数は何通り存在するか．ただしカードに書かれた数字は全て異なるものとする．

第 2 章　指数関数と対数関数

卵は二つの娘細胞に分裂し、それらは次の段階で四つの細胞になり、
次に八、一六、三二、六四、……と増えます。
……このようにして、私の身体の体細胞は、
かつて私自身であった卵の、平均してわずか五〇代目ないしは六〇代目の子孫にすぎないのです。
――シュレーディンガー『生命とは何か 物理的にみた生細胞』

細胞分裂や感染症の感染者数など, 自然現象には "決まった数を何度も掛け合わせる", すなわち冪乗(べきじょう)で表すことができる概念がしばしば登場します. このような現象を分析する際に欠かせない指数関数およびその逆関数である対数関数について学びましょう.

2.1　指数の拡張

2.1.1　指数法則

実数 a および自然数 n に対して,

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{ 個}}$$

と定められていました. 一定の時間が経過すると a 倍に個数を増やすような現象は, 経過時間を t として a^t という式で捉えることができそうですが, このような場合, t に離散的な ("とびとび" の値を取る) 自然数しか代入できないとなると不都合を感じます. 0 秒と 1 秒の中間の状態, すなわち $0.5 = 1/2$ 秒後の状態なども議論の範疇に含めたいからです. そこでまずは, この指数を自然数以外の数に拡張することを考えましょう. 鍵となるのは次の**指数法則**です.

定理 2.1.1 (指数法則)
実数 a および自然数 n に対して,

(1) $a^n a^m = a^{n+m}$,
(2) $a^n \div a^m = a^{n-m}$,
(3) $(a^n)^m = a^{nm}$,

が成り立つ.

例 2.1.2
文字を使った式を抽象的に感じたら, すぐに**ちいさな具体例**をつくってみよう.

(1) $a=2,\ n=3,\ m=2$ としてみると,

$$2^3\times 2^2=\overbrace{2\times 2\times 2}^{3\text{ 個}}\times\overbrace{2\times 2}^{2\text{ 個}}=\overbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2}^{3+2=5\text{ 個}}=2^5$$

が成り立っている.

(2) $a=2,\ n=3,\ m=2$ としてみると,

$$2^3\div 2^2=\frac{2^3}{2^2}=\frac{\overbrace{2\times 2\times 2}^{3\text{ 個}}}{\underbrace{2\times 2}_{2\text{ 個}}}=\frac{\overbrace{2}^{3-2=1\text{ 個}}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}{\cancel{2}\times\cancel{2}}=2^1$$

が成り立っている.

(3) $a=2,\ n=3,\ m=2$ としてみると,

$$(2^3)^2=2^3\times 2^3=(\overbrace{2\times 2\times 2}^{3\text{ 個}})\times(\overbrace{2\times 2\times 2}^{3\text{ 個}})=\overbrace{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2}^{3\times 2=6\text{ 個}}=2^6$$

が成り立っている.

数学では, よく知られたやさしい対象の観察から, 抽象的な対象の定義や性質を考察する, いわゆる**一般化**を頻繁に行います. このとき, 一般化されたあとの対象についても, 一般化される前のそれが満たしていた性質は同様に満たされるべきです. まずは “0 乗” について考えてみましょう.

たとえば 2 の冪乗について,

$$2^1=2\xrightarrow{\times 2}2^2=4\xrightarrow{\times 2}2^3=8\xrightarrow{\times 2}\cdots$$

が成り立っています. 2^0 についてもこの法則が満たされているとすると,

$$2^0=1\xrightarrow{\times 2}2^1=2\xrightarrow{\times 2}2^2=4\xrightarrow{\times 2}2^3=8\xrightarrow{\times 2}\cdots$$

すなわち,

$$2^0=1$$

であるべきでしょう. この列をさらに左に伸ばしていくと,

$$\cdots 2^{-3}=\frac{1}{8}\xrightarrow{\times 2}2^{-2}=\frac{1}{4}\xrightarrow{\times 2}2^{-1}=\frac{1}{2}\xrightarrow{\times 2}2^0=1\xrightarrow{\times 2}2^1=2\xrightarrow{\times 2}2^2=4\xrightarrow{\times 2}2^3=8\xrightarrow{\times 2}\cdots$$

すなわち, 自然数 n に対し,

$$2^{-n}=\frac{1}{2^n}$$

となるべきです. 一般に, 以下のように定めます.

第 3 章　微分法

「要するに、」こんどは、ほとんど泣き声である。
「伝統、ということになりますると、よほどのあやまちも、気がつかずに見逃してしまうが、
問題は、微細なところに沢山あるのです。
もっと自由な立場で、極く初等的な万人むきの解析概論の出ることを、
切に、希望している次第であります。」
——太宰治『愛と美について』

■ 絶えず変化し続ける現象の「瞬間の変化」を詳らかにすることは, その現象を理解する上で大きな手がかりになります. その記述に最適な手法が微分法です. 滑らかな曲線の上の局所的な傾きを探求するというアイデアは, 統計学において, モデルの誤差を最小化するための最適化問題, 尤度関数の極値探索などの形でその威力を発揮します.

3.1　導関数と微分の定義

3.1.1　平均の速さ

あまりにやさしい問題で恐縮ですが, 小学校で習った速さの計算を思い出してみましょう.

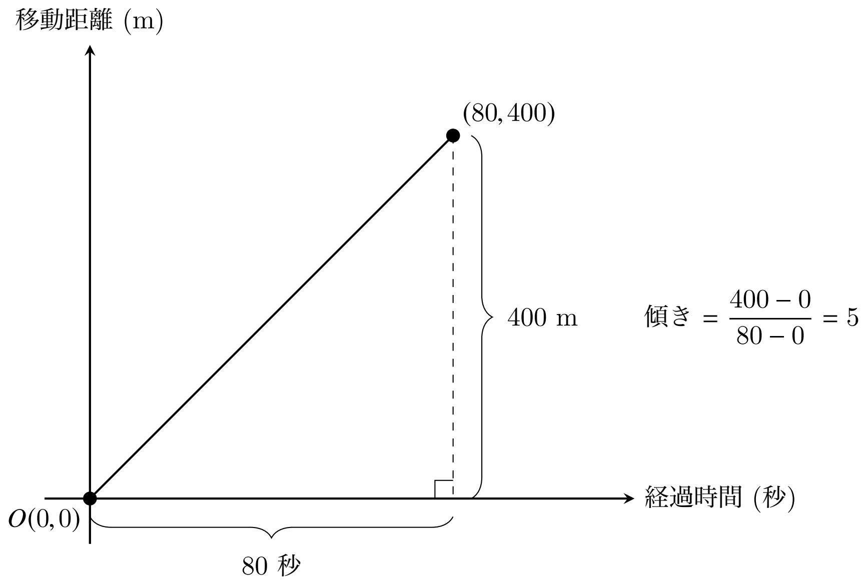
問題 3.1.1
400m を 80 秒で走りました. 速さは秒速いくらでしょうか.

解答
秒速とは 1 秒間に進むことができる距離のことであった. 400m を 80 秒で進むのだから,

$$400 \div 80 = 5$$

より, 秒速 5m.

しかし考えてみると, 400m という距離を走るとき, その速さは一定ではないはずです. 当然スタート直後の速さは遅く, 徐々にスピードに乗っていき, 理想的にはトップスピードを可能な限り維持したままゴールラインに辿り着く, というように, 絶えず変化しています. 上で求めたものは, 400m の間, 常に一定の速さで進んでいたと仮定した場合の速さ, いわば**平均の速さ**というべきものです.



上図はスタートからの経過時間と移動距離を表したグラフです．平均の速さである秒速 5m という数字は，スタートを表す原点と，ゴールを表す点を結んだ直線の傾きとして現れていることに注意しましょう．実際，点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ を結ぶ直線の傾きとは

$$\frac{y\text{ 座標の変化量}}{x\text{ 座標の変化量}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

と定義されていましたから，上の場合に計算してみると

$$\frac{y\text{ 座標の変化量}}{x\text{ 座標の変化量}} = \frac{400 - 0}{80 - 0} = \frac{400}{80} = 5$$

であり，平均の速さと一致します．標語的にいえば，**速さとは傾きである**ということを強調しておきます．

翻って，自動車を運転するときを想像してみましょう．運転席の目の前にはスピードメーターが取り付けられており，刻一刻と変化していきます．このメーターは運転手のアクセルやブレーキの操作に敏感に反応し，その車の**瞬間の速さ**を表示していると考えることができます．次にわれわれは，このような瞬間の変化量について考えていきます．

瞬間の速さを求めるにはどうすればよいのでしょうか．冒頭に求めた平均の速さという量で，瞬間の変化を捉えることができなかったのは，“80 秒” で割ったことが理由です．これは，80 秒の間一定のペースで進んだとしたら，1 秒間に何 m 進むかを求める計算に他なりません．したがって，この 80 秒という区間をもっと短くしていけばいいのです．もし最初の 10 秒で 80m 進んでいたのなら，その 10 秒間の平均の速さは秒速 $80 \div 10 = 8$m ですし，5 秒で 30m 進んでいたのなら，その 5 秒間の平均の速さは秒速 $30 \div 5 = 6$m……などと求められます．しかしこの操作はいつまで続ければよいのでしょうか．ナイーブな答えは，「割る数が “瞬間” になるまで」ですが，これでは曖昧で数学になりません．瞬間に近づけすぎて，0 秒になってしまうのも問題です．割り算において 0 で割った商は定義されない，すなわち “0 で割る” ことはできないからです．

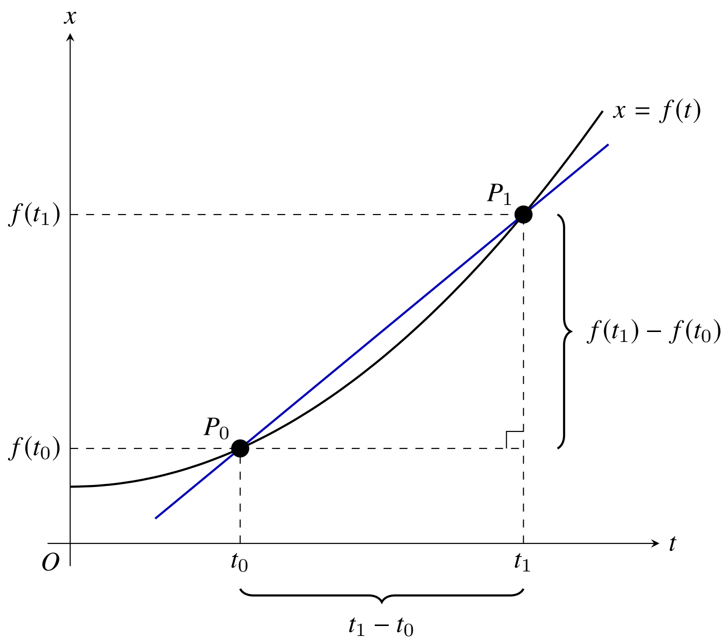
この問題を，17 世紀から 18 世紀にかけて，ニュートンやライプニッツも考えていました．

3.1.2　瞬間の速さと微分係数

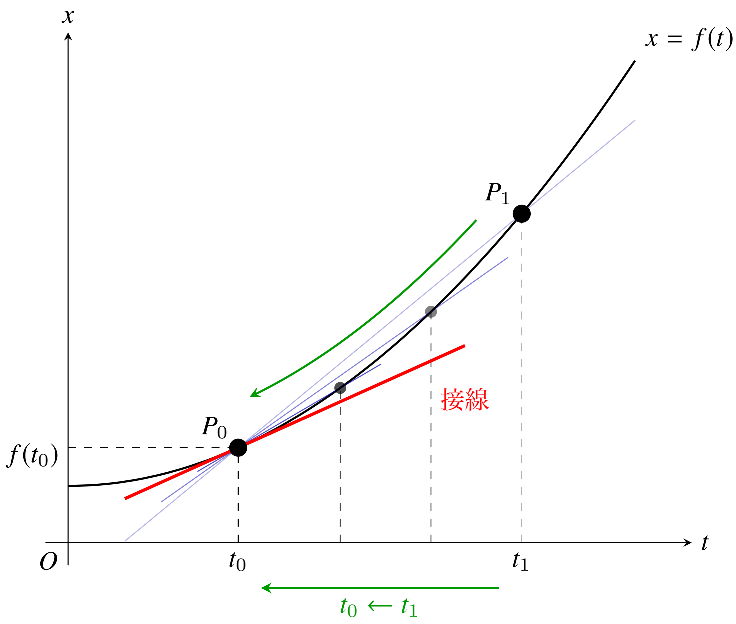
次のような関数とそのグラフを考えましょう．ある物体が運動しているとして，その移動距離 x が，運動を開始してからの経過時間 t の関数として表されている，すなわち $x = f(t)$ という関係があるとします．ある時刻 t_0 から，t_0 とは異なる時刻 t_1 までの平均の速さは，前述の通り，

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

と求められます．これは点 $\mathrm{P}_0(t_0, f(t_0))$, $\mathrm{P}_1(t_1, f(t_1))$ を結ぶ直線の傾きに他なりません．直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ を，$x = f(t)$ のグラフの**割線** (secant line) と呼びます．



ここで，$t = t_0$ での瞬間の速さを求めるために，点 $\mathrm{P}_0(t_0, f(t_0))$ は固定しておき，t_0 と t_1 の間隔をどんどん狭める，言い換えれば t_1 を t_0 に**限りなく近づける**ことを考えてみましょう．すなわち，点 P_1 が点 P_0 に，グラフに沿いながら限りなく近づいていくことになります．ただし，t_1 と t_0 が一致しないように近づけるものとします．それに伴いグラフ上では割線も移動していき，$x = f(t)$ のグラフが途切れていたり尖っていたりしなければ，最終的に $t = t_0$ での**接線** (tangent line) にどんどん近づいていきます．



速さとは傾きである，という標語を踏まえれば，この**接線の傾き**こそ**瞬間の速さ**と呼ぶのに相応しいものでしょう．ここで，“限りなく近づける” という操作を，

$$\lim$$

という記号を用いて表します．たとえば上述の接線の傾きは

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

と表すことにします．これは

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

という式において，t_1 を t_0 に限りなく近づけていったとき，この式自身が近づいていく値を指しています．この値を**極限** (limit) あるいは**極限値**と呼びます．これが瞬間の速さの定義を与えています．

ここまでの議論を一般化して，次のように定めましょう．

定義 3.1.2 (平均変化率)
関数 $y = f(x)$ について，x の値が a から b まで変化するとき，その**平均変化率** (average rate of change) を，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

で定める．$h = b - a$，すなわち $b = a + h$ とおいて，

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

とも表す．

これは 2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線 (割線) の傾きにほかなりません．